GUILELMI OUGHTRED

Ætonensis, quondam Collegii Regalis in Cantabrigia Socii,

OPUSCULA

MATHEMATICA,

D G Seidel

Quorum seriem versa pagina indicabit.

OXONIÆ,

Typis LICHFIELDIANIS, Acad. Typ.

Veneunt apud JOH. CROSLEY, & AMOS CURTEYNE. 1676.

Tractatus, qui ſequuntur, hi ſunt.

AD LECTOREM PRÆFATIO

Editioni tertiæ præfixa.

CONscripsi olim in Familia illustrissimi nuper Comitis *Arundeliæ* & *Surriæ*, cum ex filiis ejus alteri in disciplinis Mathematicis exponendis deservierim, ordinem quendam, qui mihi ad mysteria Mathematica videbatur appositissimus, ut studiosorum, qui ipsum secuturi sunt, animi scientiis illis, non leviter & superficie tenùs tingantur, sed intimè & radicitùs imbuantur. Hunc meum ordinem multorum virorum doctorum, maximè verò nobilissimi illius eruditissimíque D^ni *Caroli Cavendish* hortatu, in publicum sub titulo CLAVIS MATHEMATICÆ primò emisi Tractatus quidem ille, non methodo (sicut vulgò fit) Synthetica, per Theoremata atque Problemata longo verborum ambitu descriptus, sed via inventionis Analytica, (ita ut totus sit quasi demonstratio continua nexibus firmissimis compaginata) & non tam verbis quàm rerum speciebus depictus, primo adspectu difficultatem peperit in multis, qui forma tradendi inusitata territi, Chimæram aut Sphyngem aliquam imaginabantur: Verùm siquis, præjudicii hæc terriculamenta adspernatus, attentè presentíque animo hanc viam ingrediatur, rem videbit maximè facilem & conspicuam. Nam speciosus hic atque symbolicus modus, nec memoriam verborum multiplicitate torquet, nec phantasiam rerum multarum comparatione atque dijudicatione onerat ac distrahit; sed operationis atque argumentationis totius processum conspectui repræsentans: Theorema denique profert, non uni tantum genti intelligendum, sed omnium, quotquot sunt ubique terrarum, nationum linguis (modô de notis constet) efferendum.

Animi quidem mei sensus & votum, tum in prima Clavis meæ formatione, tum in secunda limatione, sive potius nova fabricatione, fuit, ut Matheseos studiosis quasi Ariadnes filum porrigerem, quo ad intima harum scien-

tiarum adyta deducantur, & ad optimos antiquissimósque Authores, *Euclidem*, *Archimedem*, *Appollonium Pergæum* magnum illum Geometram, *Diophantum*, ac reliquos, facilius penitiúsque intelligendos dirigantur; eorumque non propositiones modo addiscant, quod plerisque Mathematicis scientiæ quasi culmen est & fastigium; Sed etiam percipiant qua solertia, quibus æquationum, interpretationum, comparationum, reductionum, conversionum atque disquisitionum moliminibus prisci illi heroës scientiam hanc pulcherrimam ornaverint, auxerint, invenerint.

Mihi quidem in illis legendis versanti, & demonstrationes ingeniosissimas ex incogitatis & inexpectatis, sed divino quodam artificio conquisitis, principiis adeò affabrè concinnatas animadvertenti admirantíque stupor incidit, unde tanta existeret imaginationis vis, quæ tam immensam consequentiarum molem sustinere posset, faceréque ut tot res, tam longe dissitæ animo simul obversentur, & quasi ultrò in argumenti unius structuram coëant atque considant.

Quapropter ut ipsas res clariùs intuerer, propositiones & demonstrationes verborum integumentis exutas, brevibus tantùm symbolis ac notis, oculis etiam ipsis uno obtutu perspiciendas designavi. Tum Theorematum affectiones varias in æqualitate, proportione, affinitate, atque dependentia, conferendo nova elicere tentavi. Denique quæstiones consimiles problematicè fingendo, easque quasi jam confectas, via Analytica in sua principia resolvendo, rationes ac media, quibus construantur investigavi. Hinc tandem (non nisi plurimorum annorum usu atque experientia) præceptorum illa qualiscunque seges emersit.

Non erat mihi animus, jam ad extremam senectutem appropinquanti, post *primam* hujusce Clavis Editionem, in hanc iterum arenam prodiisse. Sed Venerabilis Vir Dn: *Sethus Ward*, Collegii Sidneiensis in Academia Cantabrigiensi tum Socius, nunc in Oxoniensi Professor Astronomiæ Savilianus, Vir prudens, pius, ingenuus,

nec

nec Mathesi solùm, sed & omni politioris literaturæ genere cultissimus, (qui primus Cantabrigiæ Clavis meæ usum exposuit) mei videndi & cognoscendi desiderio, domi me latitantem longo itinere perquisivit, cujus importuno hortatui, ut libellum illum sub *secunda* lima correctiorem auctiorémque quorundam, ex multis quæ apud me erant, adjectione ederem, resistendi facultas non erat. Accessit & alter hortator vehemens Dn. *Carolus Scarbrough* Doctor Medicinæ, suavissimis motibus, perspicacissimòque ingenio Vir, cujus tanta est in Mathesi solertia, & supra fidem fælix tenaxque memoria, ut omnes Euclidis, Archimedis, aliorumque nonnullorum ex antiquis propositiones & demonstrationes recitare ordine & in usum proferre potis sit. Horum ego duorum judicio de meis lubens acquiesco, ii enim sunt quos celeberrimæ totius Europæ Academiæ, Mathematicarum aliarumque artium humaniorum Professores meritò amplexentur.

Quod autem a mendis illis Typographicis, quibus priores nimium scatebant, repurgata hæc *tertia* editio exhibeatur (quod in hujusmodi scriptis maximi sit momenti) curæ illud debetur Venerabilis Viri Dn. *Joannis Wallis*, Collegii Emanuëlensis Cantabrigiæ non ita pridem Alumni; deinde Collegii Reginalis ibidem Socii; nunc apud Oxonienses Geometriæ Professoris Saviliani; Viri ingenui, pii, industrii, in omni reconditiore literatura versatissimi, in rebus Mathematicis admodum perspicacis, & in enodatione explicationéque Scriptorum intricatissimis *Zipherarum* involucris occultatorum (quod ingenii subtilissimi argumentum est) ad miraculum fælicis. Huic enim ille editioni adornandæ ultrò se offerens, & Calculi maximam partem examinavit, & operas perpetuo auxilo, atque assidua inspectione adjuvit.

Denique non sine piaculo omittam amantissimum mei Dn. *Robbertum Wood* Collegii Lincolniensis Socium, Philosophiæ atque Medicinæ studiosum, Virum optimum atque doctissimum, qui non calamo solum, & scriptorum examinatione, nequid fortè mihi in computationibus

bus erroris exciderit, amicum præstitit officium, sed etiam bene maximam horum partem Anglicè non ita pridem edendam transtulit.

Partem autem illam quæ Geometricam Horologiorum Sciotericorum rationem tradit, ex Anglico idiomate in Latinum vertit Dn: *Christophorus Wren*, Collegii Wadhamensis Commensalis Generosus, Admirando prorsus ingenio Juvenis, qui nondum sexdecim annos natus, Astronomiam, Gnomonicam, Staticam, Mechanicam præclaris inventis auxit, ab eoque tempore continuo augere pergit; & revera is est à quo magna possum (neque frustra) propediem exspectare.

Huic Clavi Mathematicæ, post primam editionem, accedit I, Affectarum quovis modo Æquationum in numeris luculenta resolutio. II, Elementi Euclidis Decimi declaratio. III, Elementorum Euclidis Decimi tertii & Decimi quarti de Solidis Regularibus illustratio. IV, Sex Theorematum fundamentalium circa Anatocismum inventio. V, Regulæ falsæ positionis demonstratio Analytica. VI, Theorematum Archimedis de Sphæra & Cylindro declaratio. VII, Horologia Scioterica in Plano, Geometrica delineandi Methodus. Ultimò, inveniet etiam hîc lector Logisticæ decimalis (quam præ sexagenaria illa Mathematices studiosis, præsertim in computationibus Astronomicis, commendatam esse cupio) regulas breves intersertas: una cum Multiplicationis & Divisionis contractione admodum necessaria: Et Logarithmorum usum, quantum satis est.

Horum ego pleraque cum ante plurimos annos, in gratiam & usum nobilissimi eruditissimíque Domini *Gerardi* Domini *Aungier* Baronis de *Longford*, hominis verè pii atque Christiani, doctíque non modò sermonis utriusque linguæ, sed & Hebraicæ aliarúmque linguarum Orientalium, ac utriusque philosophiæ, & de me optimè meriti, scripserim; jure eum suo reticendo fraudare pro piaculo duxerim. Is enim est, quo fautore atque Mæcenate gloriari pro summo honore habeam.

INDEX CAPITUM.

I. CLAVIS MATHEMATICÆ.

II. De Æquationibus Affectis Tractatus.

III. Ele-

CLAVIS

CLAVIS MATHEMATICÆ DENUO LIMATA.

Cap. I. *De Notatione.*

1. TAbella admodum utilis, non modò pro numerorum Notatione, quam primâ facie exhibet; ſed etiam in omni computatione per numeros tum communes, tum figuratos, tum artificiales, qui vulgò Logarithmi dicuntur.

Integri. Partes.

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	&c.
M	M	M	M	M	M	M	C	X	I	X	C	M	M	M	M	M	M	M	
M	M	M	M	C	X	I						I	X	C	M	M	M	M	
M	C	X	I												I	X	C	M	

2. In hâc tabellâ numeri ſuperiores ſunt *Indices* ſive exponentes terminorum utrinque ab unitate continuè proportionalium; affirmativi in integris, negativi in partibus. Eſtque progreſſio in decuplâ ratione verſus ſiniſtram, & in ſubdecupla verſus dextram; ſicut literæ numerales ſubſcriptæ oſtendunt.

Est igitur progressio ab unitate in integris, 1, 10, 100, 1000, 10000: Et in partibus, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$: Et sic in infinitum.

3. Atque hoc modo in omni aliâ Progressione, terminis ab unitate quacunque ratione sive crescentibus, sive decrescentibus, Indices sui erunt apponendi.

4. Tabellam quidem in decimali ratione ordinavi, tum ut numerorum quorumcunque (sive Integri sint, sive partes, sive mixti) valores per gradus & periodos æstimentur: tum quia Logistica hæc decimalis sexagenariâ, in computationibus Astronomicis, multò facilior est atque concinnior. Hoc planè perspexit, quicunque is fuit, qui primus canonem Sinuum à semidiametro 60, ad 1 cum circulis annexis, revocavit. Utinam idem etiam in aliis canonibus fieret.

5. Partes decimales scibuntur in unâ lineâ cum integris, distinguuntur autem lineolâ rectangulari, quæ idcircò *separatrix* dicitur. Et quemadmodum in integris, quilibet ab unitatum loco gradus augetur versùs sinistram decuplando: sic in partibus decimalibus, quilibet ab unitatum loco gradus minuitur versus dextram subdecuplando.

6. Partes decimales denominationem suam sortiuntur à loco figuræ suæ ultimæ: ut 0|5 sunt 5 decimæ partes: 0|56 sunt 56 centesimæ partes: 0|056 sunt 56 millesimæ partes, & sic de reliquis omnibus.

7. Circuli ante integros, vel post partes decimales mihi valent: at verò post integros, & ante partes decimales

males (hoc est, utrinque lineę separatrici proximi) vim suam retinent: nam gradus constituunt quibus figurarum valores censentur: ut 0005, significant tantummodo 5: & 0|500, 5 sunt decimæ partes.

8. Quare in partibus decimalibus scribendis, linea separatrix semper apponatur; & loci, si qui sunt, vacui, circulis suppleantur: ut 0|00005 sunt 5 centies millesimæ partes.

9. Signum addendi sive affirmationes est + plus, sive pl: ut 34, vel + 34.

10. Signum minuendi sive negationis est — minus, sive mi: ut — 34, negantur omnino esse.

11. Pertinet autem signum ad magnitudinem sequentem, cui præfigitur. Et omnis magnitudo, cui non est præfixum signum negationis, intelligitur esse affirmata, & habere signum +, licet non sit expressum.

12. Et nota quod signis + & - utor, quando simplex magnitudo affirmatur vel negatur de simplice: signis autem pl: & mi: quando magnitudo composita affirmatur vel negatur de simplice, vel simplex de composita.

13. Magnitudines denotari possunt vel numeris mensuram ipsarum significantibus, vel etiam speciebus: ut linea longa septem unicas, designatur vel per 7; vel per unam aliquam literam aut notam, A, B, C, &c; vel per duas literas terminis lineæ adscriptas, AB, BC, CD, &c. pro libitu: modò memoriâ teneas pro quâ magnitudine species quælibet statuitur.

14. Speciosa hæc Arithmetica arti Analyticæ (per quam ex sumptione quæsiti, tanquam noti, investigatur quæsitum) multo accommodatior est, quam illa numerosa. Nam in numerosâ, numeri à novo, quem proferunt, ita absorbentur, ut penitus dispareant, nec ullum sui vestigium relinquant: At in speciosâ, permanent species sine aliquâ mutatione, specimen exhibentes totius operationis: unde non solùm in quæsiti notitiam ducunt, sed etiam Theorema generale pro solutione consimilium quæstionum, in aliis magnitudinibus datis, edocent.

CAP. II. *De Additione.*

1. NUmerus inventus per Additionem, dicitur Summa, vel Aggregratum. Ut 3 & 7 constituunt 10.

2. Additio incipit ad dextram, & summas singulorum locorum particulares inventas subscribit, in locis suis propriis.

3. In Additione omnes numeri dati simul æquantur Summæ.

Exempla

Exempla Additionis.

			l.	s.	d.
79403	3794	236	17	13	4
8956	584	3	9	16	7
67293	947	08	238	09	6
5087	4720	7429	70	00	10
160739	48	15	48	10	3
	10094	8599	384	10	6

4. Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas ſervatis ſignis.

ad	3A	A	5A	3A	A
adde	A	-A	—3	—5A	E
Sūma	3A+A	A-A	5A-3A	3 A- 5A	A+E
hoc eſt	4A	o	2A	--2A	

ad	A+B	A+B	Sic in Indicum Additione $\left\{\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ \hline 1 & 1\,1 \end{array}\right.$
adde	A-B	A-C	
Summa	2 A	2 A + B - C	

Cap. III. *De Subductione.*

1. Numerus inventus per Subductionem dicitur Reliquus, vel Differentia, vel Exceſſus. Ut è 7 tolle 3, reſtat 4.

2. Subductio incipit ad dextram, & differentias ſingulorum locorum particulares inventas ſubſcribit, in locis ſuis propriis.

3. In Subductione, numerus ſubducendus, unà cum differentia, æquatur numero ex quo.

Exempla Subductionis.

		l.	s.	d.
347206836	3794|236	17	17	4
6807592	947|08	9	16	7
340399244	2847|156	7	16	9

4. Subductio *ſpecioſa* conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus ſignis magnitudinis ſubducendæ.

Ex	4 A	3 A	5 A	A
tolle	A	5 A	-3 A	E
Reſtat	4 A-A	3 A-5 A	5 A+3 A	A-E
hoc eſt	3 A	-2 A	8 A	

Ex	A	A	Sic in Indicum ſubductione.	3	3
tolle	B+C	B-C		2	2
Reſtat	A-B-C	A-B+C		5	5

Cap. IV. *De Multiplicatione.*

1. NUmerus inventus per Multiplicationem, dicitur Factus, vel Productus; vel Rectangulum, vel Planum. Nam unus è numeris propoſitis habetur

betur pro longitudine, alter pro latitudine: & numeri propositi dicuntur Factores atque Latera. Maxima quippe binarum magnitudinum potestas, est figura ex ipsis composita, cujus anguli sunt recti, & latera parallela.

2. Multiplicatio incipit ad dextram, & singulas figuras unius numeri dati, in singulas alterius figuras ducit: & factos demum, habitâ locorum ratione, in unam summam colligit. Et si partes decimales numeris propositis sint admixtæ, è toto facto tot locos linea separatrice abscindit, quot sunt loci partium in utroque factore. Nam in Multiplicatione Index cujusque particularis figuræ facti, invenitur addendo Indices figurarum multiplicatæ & multiplicantis. Sic 58|73 ductus in 600, facit 35238. Nam Index figuræ 6 in 600, est 2: & Index ultimæ figuræ 3 in 58|73 est 2. addantur Indices 2 & 2, extabit 0 pro Indice ultimæ figuræ facti 35238: quæ idcircò pertinet ad locum unitatum. Et consimilis reliquarum figurarum in facto censura gradualis institui poterit.

3. Si è numeris propositis, unus, vel uterque, adjunctos habeat ad dextram circulos: omissis circulis, fiat ipsorum numerorum Multiplicatio: & facto demùm tot insuper integrorum loci accenseantur, quot sint omissi circuli in utroque factore.

4. In Multiplicatione est, ut unitas, ad unum è factoribus: Sic alter è factoribus, ad factum. Ut si ducatur 4 in 6 fic[illegible] 24: Est igitur 1. 4 :: 6. 24: vel 1. 6 :: 4. 24.

Exempla Multiplicationis.

4576	580|34
892	47|5
9152	290170
41184	406238
36608	232136
4081792	27566|150

358	58|73
600	6|50
214800	35238

5. Contractio Multiplicationis, in Logistica valdè utilis, sic est. Si instituto tuo sufficiat habere factum non integrum, sed multatum aliquot ex ultimis figuris: statues unitatis locum minoris numeri, sub illa figura majoris, cujus Index æqualis fit numero figurarum, vel abscindendarum in integris vel relinquendarum in partibus decimalibus: Et reliquas figuras minoris numeri, sub numero majore ordine inde contrario. Tum in multiplicando incipies ubique ad illam figuram majoris numeri, quæ est supra eam figuram minoris, qua multiplicatur: habita tamen ratione incrementi, quod ex subsequentibus figuris majoris numeri suppeditatur. Hujus compendii casus sunt quatuor.

Casus I. Si velis factum habere purum à partibus: Statues unitatis locum minoris sub unitatis loco

co majoris. Ut in exemplo, ubi 246|914 ductus in|35 producis 8708 integros, abscissis omnibus partibus decimalibus.

246|914
72|53

7407
1235
49
17

8708

Casus II. Si velis habere factum cum locis aliquot partium, puta quatuor: Statues unitatis locum minoris numeri sub quarto loco partium majoris. Ut in priore exemplo, factus erit 8708|6568 mixtus cum quatuor locis partium.

246|914
72|53
74074200
12345700
493828
172840

8708|6568

Casus III. Si velis factum multatum aliquot locis integrorum, puta quinque: statues unitatis locum minoris numeri loco quinto ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo, ubi 80902 sinus graduum 54 multiplicandus est per 39875 sinum maximæ declinationis 23° 30: prodibit 32260 sinus declinationis solis ad ♉ 24°.

80902
57893

24271
7281
647
57
4

32260

Casus IV. Si velis factum multatum locis integrorum, puta quinque, reparari aliquot locis partium, puta quatuor. Quia $5 - 4 = 1$: Statues unitatis locum minoris numeri uno loco ante unitatis locum majoris. Ut in exemplo ubi sinus 42262 multiplicatur per 0|0064, ita ut abscissis à facto quinque figuris ultimis, restituantur quatuor loci partium: Factus erit 0|0027.

$$\begin{array}{r} 4\,2\,2\,6\,2 \\ 4\,6\,0\,0|0 \\ \hline 2\,5 \\ 2 \\ \hline 0|0027 \end{array}$$

6. Multiplicatio *speciosa* connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ in vel ×: vel plerumque absque nota, si magnitudines denotentur unica litera. Et, si signa sint similia, producta magnitudo erit affirmata: sin diversa, negata. Effertur autem per in.

Et nota, quòd A in A, sive A×A, sive A A, est Aq. AAA sive AqA, est Ac. AAAA, sive Aq Aq, sive AcA, est Aqq. AAAAA, sive AcAq, sive AqqA, est Aqc. AAAAAA, sive Ac Ac, sive Aqq Aq, sive AqcA, est Acc, &c. Nam potestas quælibet superior fit ex duabus inferioribus, quarum dimensiones simul æquantur numero dimensionum superioris. Quot autem magnitudines sunt quæ multiplicantur, totidem sunt dimensiones.

Duc	A	A+E	A−E	A+E+I	B+1
in	E	B	B	Z	A
fiet	AE	BA+BE	BA−BE	ZA+ZE+ZI	BA+A

Duc.

Duc 3A	AE	AE	A+E	A+E
in 2A	A	AE	A+E	A-E
fiet 6Aq	1 AqE	1AqEq	Aq+AE	Aq+AE
			4AE+Eq	—AE
			Aq+2AE+Eq	—Eq
				Aq-Eq

Ad hunc etiam modum Multiplicatio fiet si magnitudines constent binis literis. Ut si latus AB+CD multiplicandum sit in se, producetur quadratum ABq+2AB×CD+CDq.

Cap. V. *De Divisione.*

1. Numerus inventus per Divisionem dicitur Quotus, vel etiam Parabola: quia oritur ex applicatione numeri plani ad longitudinem datam, ut inveniatur latitudo congrua. Et si numerus ad numerum applicetur cum lineola interjecta, ostendit quod numerus ille superior dividendus sit per inferiorem, ad quem applicatur: ut $\frac{12}{4}$ & $\frac{1}{12}$.

2. Divisio incipit ad sinistram: & postquam ex dividendo sufficientem divisori dividuum distinxerit, & sub ipso divisorem subscripserit, vel saltem subscriptum cogitaverit singulas figuras divisoris ex singulis ipsius dividui figuris supra stantibus, æqualiter, quoties fieri poterit, tollit: Tum divisore per quotum inventum multiplicato, factoque ablato ex dividuo, divisorum in locum proximè sequentem promovet, novamque uti prius divisionem instituit; donec totum dividendum percurrerit. Quilibet autem

tem quotus particularis inventus, ejusdem debet esse loci, sive gradus, cujus est figura dividendi, quæ stat, vel cogitatur stare supra unitatis locum divisoris. Nam in Divisione, Index cujusque particularis figuræ Quoti, invenitur tollendo Indicem figuræ dividentis ex Indice figuræ divisæ. Sic 17|14 divisus per 857, dat 0|2 pro Quoto. Index enim primæ figuræ dividuæ 17 est 1; & Index primæ figuræ divisoris 8 est 2: Tollatur 2 ex 1, restabit $\bar{1}$ pro Indice primæ figuræ: quæ idcircò pertinet ad locum primum partium decimalium.

3. Et si divisor adjunctos sibi habeat ad dextram circulos: omissis circulis, & abscissis totidem ultimis figuris dividendi, in numeris reliquis fiat divisio. In fine autem divisionis restituendi sunt, tum omissi circuli tum figuræ abscissæ.

4. In Divisione est, ut Divisor ad unitatem, sic dividuus ad Quotum: vel ut dividuus ad divisorem, sic Quotus ad unitatem. Ut diviso 24 per 6, quotus erit 4: Est igitur 6. 1::24. 4: Item 24.6::4. 1.

5. Si magnitudo facta sit ex duabus magnitudinibus, una ex iis ipsam per alteram metietur.

6. In Multiplicatione, atque Divisione, unitas nihil mutat.

7. Si numerus numerum multiplicet, idemque factum dividat, nihil fit. Nam quod multiplicatio conficit, Divisio dissolvit. Quare in applicatione magnitudinis ad magnitudinem, si eadem magnitudo sit tum supra lineam, tum infra, expungatur utrobique.

Exempla

Exempla Divisionis.

12.

```
         8921317
297)  187135075 (630084 127/297
      178213768
        892118
         2901
       435287
58034) 275866150 (475
         23213680
          406237
           2901

          187135075 (630084 127/297
          297
          1782
           893
           297
           891
             2507
             297
             2376
             1315
              297
             1188
              127

6000) 4320765 (7201275
```

8. Aliquando numerus aliquis dividi postulatur per numerum irrationalem, vel infinitum, sive integer sit, sive mixtus. Atque in hoc casu, sumptis, quot opus est, è primoribus figuris divisoris pro primo divisore, per ipsas divides numerum propositum: deinde pro singulis particularibus divisionibus subsequentibus, divisorum minues amputando versus sinistram totidem ultimas figuras, donec quotum satis amplum inveneris: ut si dividantur 467023 per numerum infinitum 3570926425, Quotus erit 1307 80 ferè.

```
                   17
                  303
                 2803
                109930
3570926425) 467023 (1307 80 ...
                357093
                107127
                  2800
                   286
```

Pulcherrima hæc est Divisionis contractio, & maxima usus in computationibus Astronomicis. Ut si per 137638 dividendus sit 126223 ductus in sinum totum, hoc est auctum quinque circulis: Appones tantummodò unum circulum: & pro quatuor reliquis minues divisorem. Ut

137638) 1262230 (91707.

9. Divisio *speciosa* statuit magnitudinem dividentem sub dividendà, cum lineola interjecta: tum considerat

siderat an magnitudo aliqua utramque communitèr multiplicaverit; atque ipsam utrobique expungit. Divisio autem in iisdem signis dat +, in diversis autem per ad.

Applica ad	$\left\{\frac{AF}{A}\right.$	$\frac{BAc}{Aq}$	$\frac{BA+A}{A}$	$\frac{BA-CA}{B-C}$	$\frac{6Aq}{3A}$	scil.	$\frac{2\times 3Aq}{3A}$
Oritur	E	BA	B+1	A	2A		2A

Cap. VI. *De Proportione.*

1. Si è quatuor numeris datis, primus ita se habeat ad secundum, ut tertius ad quartum: dicuntur quatuor illi numeri esse proportionales. Numerorum autem ad se invicem habitudo invenitur dividendo antecedentem per consequentem: ut 31 ad 7 ratio est $4\frac{3}{7}$, hoc est quadrupla supertripartiens septimas.

2. Quare si numerus duos numeros multiplicet, facti erunt multiplicatis proportionales. Et si numerus duos numeros dividat, quoti erunt divisis proportionales.

$$\text{Ut } 4\times\begin{cases}7.\ 28.\\ 9.\ 36.\end{cases} \& \ 4)\begin{matrix}28\ (7.\\ 36\ (9.\end{matrix}$$

$$\text{Item } A\times\begin{cases}B.\ BA.\\ C.CA.\end{cases} \& \ A)\begin{matrix}BA.\ B.\\ CA.C.\end{matrix}$$

3. Quare si quatuor numeri sint proportionales, factus ab extremis æquatur facto à mediis. $7.\ 9 :: 7\times 4.\ 9\times 4 :: 28.\ 36.$ At $7\times 9\times 4 = 9\times 7\times 4$.

4. Hinc sequitur aurea (quæ dicitur) regula Proportionis.

portionis. Si è tribus numeris datis, rectangulum sub secundo & tertio applicetur ad primum: hoc est, si secundus multiplicet tertium, & primus dividat factum: quotus erit tribus datis quartus proportionalis. Tres numeri dati sunto 7, 9, 28: & pro quarto quæsito statuatur Q. Est igitur 7.9::28.Q. Quare $7Q = 9*28$. Ideoque $\frac{9*28}{7} = Q$. Item 5.12::8. $\frac{8\times12}{5}$, hoc est $19\frac{1}{2}$.

5. E tribus numeris datis ad quartum Proportionalem inveniendum, duo primi innuunt rationem, & reliquus ingreditur quæstionem; estque in Proportione Directâ primus terminus (sive Divisor) homogeneus ei per quem fit quæstio: At in Proportione Reciprocâ primus terminus (sive Divisor) ipse est per quem fit quæstio.

6. Directa quidem Proportio est, quando terminus is per quem fit quæstio, quô major est, eô quartum majorem requirit: & quô minor eô minorem.

7. Reciproca Proportio est, quando terminus is per quem fit qnæstio, quô major est, eô quartum minorem requirit: & quô minor, eô majorem.

8. Proportio continua ∺ est, quando termini omnes medii inter primum & ultimum, rationum sunt tum consequentes, tum antecedentes. Ut 8, 12, 18, 27, sunt ∺. Nam 8.12::12.18.27.

Item $\alpha, \beta, \frac{\beta q}{\alpha}, \frac{\beta c}{\alpha q}, \frac{\beta qq}{\alpha c}, \frac{\beta qc}{\alpha qq}$, &c. sunt ∺

Quare si in hâc serie ultimus terminus fit ω, & summa omnium terminorum totius progressionis sit Z: erit $Z-\omega$ summa omnium antecedentium: & $Z-\alpha$ summa omnium consequentium.

9. Si

9. Si quatuor magnitudines sint proportionales, $A.\alpha :: B.\beta$: etiam alternè, & inversè, & compositè, & divisim, & conversè, & mixtim proportionales erunt,

	$A.\alpha ::$	$B.\beta.$
alternè,	$A. \quad B ::$	$\alpha.\beta.$
inversè,	$\alpha. \quad A ::$	$\beta. \ B.$
compositè,	$A+\beta. \quad \alpha ::$	$B+\beta.\beta.$
vel,	$A+B. \quad B ::$	$\alpha+\beta.\beta.$
divisim,	$A-\alpha. \quad \alpha ::$	$B-\beta.\beta.$
vel,	$A-B. \quad B ::$	$\alpha-\beta.\beta.$
conversè,	$A.A\pm\alpha ::$	$B.B\pm\beta.$
vel,	$A.A\pm B ::$	$\alpha.\alpha\pm\beta.$
mixtim,	$A+\alpha.A-\alpha ::$	$B+\beta.B-\beta.$
vel,	$A+B.A-B ::$	$\alpha+\beta.\alpha-\beta.$

10. Si quotlibet magnitudines sint proportionales, erit ut unus antecedens, ad suum consequentem; sic summa antecedentium, ad summam consequentium. Esto $A.\alpha :: B.\beta :: C.\gamma :: D.\delta$: erit $A.\alpha :: A+B+C+D.\alpha+\beta+\gamma+\delta.$

$$\text{Nam}\begin{cases} A.\alpha :: B.\beta. \text{ \& compositè} \\ A+B.\alpha+\beta :: (B.\beta ::)\ C.\gamma. \ \& \\ A+B+C.\alpha+\beta+\gamma :: (C.\gamma ::)\ D.\delta. \ \&c. \end{cases}$$

Item in $\ddot{\div}$, $\alpha.\beta :: Z-\omega.Z-\alpha.$ Quare $\alpha Z-\alpha q = \beta Z-\beta\omega.$ vel $\beta Z-\alpha Z = \beta\omega-\alpha q.$

Hinc obiter liquet inventio summæ omnium terminorum $\ddot{\div}$, sive Progressionis Geometricæ: per hanc Regulam $\left\{\dfrac{\beta\omega-\alpha q}{\beta-\alpha} = Z.\right.$

11. Si plurium proportionum antecedentes sint æquales; erit ut unus antecedens, ad summam suorum consequentium: Sic alter antecedens ad summam

suorum. Esto A.B :: $\alpha.\beta$: & A.C :: $\alpha.\gamma$ :: & A.D :: $\alpha.\delta$: erit A.B+C+D :: $\alpha.\beta+\gamma+\delta$. Liquet ex priore demonstratione, terminis alternè positis.

12. Si binarum rationum consequentes sint æquales, sunt ut antecedentes. Si verò antecedentes sint æquales, sunt reciprocè ut consequentes.

$$\tfrac{7}{1}.\tfrac{9}{1} :: 7.9. \quad \text{Et } \tfrac{1}{9}.\tfrac{1}{7} :: 7.9.$$

13. Si bis quatuor magnitudines sint similiter proportionales; ipsarum etiam tum summæ, tum differentiæ proportionales erunt.

14. Si quatuor magnitudines proportionales, per alias quatuor magnitudines proportionales multiplicentur, vel dividantur: etiam Factæ, vel Quotæ, proportionales erunt. Sequitur ex 3.

15. Ratio antecedentis ad consequentem componitur, vel ex ratione antecedentis ad tertium, & tertii ad consequentem: vel ex ratione tertii ad consequentem, & antecedentis ad tertium. Ut

$$7.9 :: \times \left\{ \begin{matrix} 7.A. \\ A.9. \end{matrix} \right. \qquad \text{Item } 7.9 :: \times \left\{ \begin{matrix} A.9. \\ 7.A. \end{matrix} \right.$$

16. Inventio quarti proportionalis in computationibus Astronomicis.

Si 100000 sit primus terminus, invenitur quartus per 5, Cap. 4. Cas. 3. Ut

100000. 80902 :: 39875. 32260.

Si 100000 sit secundus terminus, invenitur quartus per 8, Cap. 5. Ut

137638. 100000 :: 126223. 91707.

17. Inventio partis proportionalis ex datâ differentiâ duorum numerorum in Canone Prosthaphæreseωn.

In

In tabulis Prutenicis, Ad epicycli primi Lunæ Anomaliam Gr: 62, Prosthaph: ablativa est Gr: 4|1786. & Differentia ibidem Gr: 0|0433: Quanta ejus pars debitur Anomaliæ Gr: 62|5667? Dic

1. 0|0433 :: 0|5667. 0|0245: per cap 4. sect. 5. Caſ. II. Tum 4|1786 + 0|0245 = 4|2031: quæ est Prosthaph: correcta.

Et contrà si quæratur Anomalia primi Epicycli Lunæ, congruens Prosthaphæresi Grad: 4|2031. Proximè minor in Canone est Gr: 4|1786, respondens Anomaliæ Gr: 62: Estque Differentia ibidem Gr: 0|0433. Est autem 4|2031 -- 4|1786 = 0|0245. Dic

0|0433. 0|0245 :: 1. 0|566 +, partes adjungendæ Gr: 62. Eritque Anomalia quæsita Gr: 62|566+.

18. Conversio partium Sexagesimarum in Decimales & contra Decimalium in Sexagesimales.

Partes Sexagesimæ, puta 45, convertuntur in Decimales, dividendo per 60. Et contra partes Decimales, puta 0|75, convertuntur in Sexagesimas, multiplicando per 60.

Ut 6|0. 4|5 :: 1. 0|75. } Nam
& 1. 0|75 :: 60. 45. }

Divisio per 60, removet lineam separatricem uno loco versus sinistram, & insuper dividit per 6. Et Multiplicatio per 60, promovet lineam separatricem uno loco versus dextram, & insuper multiplicat per 6. Quæ regula notatu digna est.

Si verò plures ſint ſpecies Sexageſimales annexæ Integris, puta $127^{\circ}\ 32'\ 00''\ 09'''\ 45''''$: hoc uteris compendio. Sub Integris 127 ſtatue ſpecies Sexageſimales deſcenſu obliquo: Tum facto initio ad infimam, ſingulas divide continuè per 6: Et quotos ſupraſcriptos ordini proximo ſuperiori adjunges, donec ad Integros perveneris.

127|533784722 × 6
'32|002708333
''00|1625
'''0975
6) 1v45

Et contra, ſi partes Decimales dentur, puta 127|5333784722: multipſicabis ipſas continuè per 6; & factos ſubtus ſcribes, amputato in ſingulis ordinibus uno loco versùs dextram; ut deſcenſus obliquus compleatur. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus, puta Grad: 236|4276, convertuntur in partes Decimales diei; dividendo per 360, hoc eſt 6×60.

6) 236|4276
60) 39|4046 ×60
0|6567433: ×60

Et contra, partes Decimales Diei puta 0|6567433: convertuntur in Gradus, multiplicando per 360, hoc eſt 60×6. Intuere diligenter exemplum.

Gradus Æquinoctialis, cum partibus Decimalibus puta Grad: 236|4276 convertuntur in Horas dividendo per 15, hoc eſt, 3×5.

3) 236|4276
5) 78|8092 ×3
15|76184 ×5

Et

Et contra, Horæ cum partibus Decimalibus, puta 15|76184 convertuntur in Gradus, multiplicando per 15, hoc eſt, 5×3.

Horæ cum partibus decimalibus, puta Ho: 15|76184 convertuntur in partes Decimales Diei, dividendo per 24, hoc eſt, 4×6.

Et contra partes Decimales Diei, puta 0|6 57433+ convertuntur in Horas, multiplicando per 24, hoc eſt, 6 × 4.

$$\left\{\begin{array}{l} 4)\ 15|76184 \\ 6)\ \ 3|94046 \times 4 \\ \quad\ 0|6567433 : \times 6 \end{array}\right.$$

Summa collecta, puta 191374, convertitur in expanſam, dividendo continuè per 60, & contra ſumma eadem expanſa, 53 09 34, convertitur in collectam multiplicando continuè per 60.

Notandum autem hic eſt, quod ſi ſumma collecta ſit unitatum, ſcil: 191374°, expanſa erit 53'' 09' 34°, hoſt eſt 53 Sexagenæ ſecundæ, 9 Sexag: 1æ, & 34 unitates. Si verò ſumma collecta ſit ſexageſimarum ſecundarum, ſcil: 191374''; expanſa erit 53° 09' 34''.

$$\begin{array}{l} \quad\ \ 19137|4 \\ 60)\ 318|9|3 \times 60 \\ \quad\ \ \ 53|0 \end{array}$$

19. Illa quidem proportio, rationum fuit æqualitas & dicitur Geometrica, eſt autem alia proportio Arithmetica, quæ eſt æqualitas differentiarum: nempe quando in quatuor terminis, eadem eſt differentia tertii & quarti, quæ eſt primi & ſecundi. Ut 7.4:12.9 vel 7. 7-3: 12. 12-3. Arithmeticæ proportionales ſunt.

20. Quare è quatuor numeris Arithmeticè proportionalibus, summa extremorum æquatur summæ mediorum $7 + 12 - 3 = 7 - 3 + 12$.

21. Et si è tribus numeris datis secundus addatur tertio, & primus tollatur è summa: reliquus erit quartus Arithmeticè proportionalis. Ut si dentur 7, 4, & 12: erit $12 + 4 - 7 = 9$, qui quartus est quæsitus.

22. Est etiam proportio Arithmetica continua, sive Progressio, quando omnes termini à primo eadem continuè exsurgunt differentia: Ut 4,7, 10, 13, 16,19,&c. Differentia communis omnium est 3. Nam in hâc serie, primus (& quasi radix) est 4: secundus constat ex primo & differentiâ unâ: Tertius constat ex primo & differentiis duabus: Et generaliter quilibet terminus constat ex primo & ex summâ differentiarum, quarum numerus uno minor est quam numerus terminorum: Exempli gratia, terminus decimus tertius conflabitur ex primo & differentiis duodecim, quarum summa est 36. Est igitur $4+36$, hoc est 40, terminus decimus tertius.

23. Si in Progressione Arithmetica, primus terminus addatur ultimo, & summa ducatur in numerum terminorum: factus erit duplicata summa totius Progressionis: Nempe $40+4$ in $13=572$, quæ summa est terminorum duplicata.

24. Si supra seriem terminorum in Progressione Geometrica, statuatur pro Indicibus, series terminorum qualicunque Progressionis Arithmeticæ: quibuslibet quatuor numeris in Arithmetica proportione respondebunt quatuor numeri Geometricè proportionales.

Indices,

Indices, 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.
Termini, 5. 15. 45. 135. 405. 1215. 3645. 10935,

Quia $10+16-6=20$; Erit $\frac{45\times1215}{5}=10935$.

Atque hinc patet inventio termini cujusvis in Progressione Geometrica.

25. Est etiam tertia Proportio, Musica dicta, Quando in quatuor numeris, est ut Primus ad Quartum: sic differentia primi & secundi, ad differentiam Tertii & Quarti. Ut 5, 8, 12, 30, sunt musicè proportionales: quia 5. 30 :: 8-5. 30-12 :: 3. 18. Item in speciebus A, M, N, E; Esto A. E :: M − A. E − N. Quare AE − AN = ME − AE. Terminis hisce rité ordinatis Regula erit, $\frac{AN}{2A-M}=E$. & $\frac{EM}{2E-N}=A$.

In verbis sic, Si rectangulum sub primo & tertio dividatur per excessum primi duplicati supra secundum: quotus erit quartus in Musica proportione. Quare oportet terminos sic dari, ut primus duplicatus excedat secundum.

Cap. VII.
DE MAXIMA COMMUNI MENSURA:
quâ numeri dati reducuntur ad minimos terminos ejusdem rationis.

1. MAxima duorum numerorum communis mensura invenitur perpetua divisione majoris per minorem, & divisoris per reliquum. Nam divisor ille qui primus dividuum suum metitur, absq;

ullo reliquo, maxima erit utriusque numeri dati communis mensura. Ut numerorum 899 & 744 maxima mensura invenietur 31.

31 : 124 : 155

31) ~~124~~) ~~155~~) ~~744~~) ~~899~~ (1 (4 (1 (4

~~124~~ ~~124~~ ~~620~~ ~~744~~

2. Numerorum reductio ad minimos terminos ejusdem rationis fit dividendo utrumque per maximam ipsorum communem mensuram. Ut 899 & 744 reducuntur ad 29 & 24, qui minimi sunt termini in eadem ratione, diviso utroque per 31 maximam utriusque mensuram. Sic $\frac{3Aq}{6A}$ reducuntur ad $\frac{A}{2}$ dividendo utrumque terminum per 3A. Et $\frac{4Acc}{6Aqq}$ reducitur ad $\frac{2Aq}{3}$ dividendo per 2Aqq. Item $\frac{BA}{B}$ reducitur ad A, dividendo utrumque per B. Nam quod multiplicatio conficit, divisio dissolvit.

3. Quare, Si maxima duorum numerorum communis mensura sit 1: dicuntur duo illi numeri primi inter se: suntque minimi in eadem ratione, ut 29 & 24.

4. Si numerus, primus sit ad utrumque factorem, primus erit ad factum.

Hinc proportionis operatio	1		
fieri sæpenumero potest faci-	~~3~~	2	5
lior, ut in exemplo.	~~12~~.	8 ::	~~15~~. 10

5. Memento autem diligenter, *Quotiescunque fractio aliqua, sive ratio, proponitur, ut ipsam primò ad minimos terminos reducas.* $\frac{744}{899}$ fiant $\frac{24}{29}$.

CAP.

CAP. VIII.

De PARTIBUS: quæ etiam fractiones, sive numeri fracti, dicuntur.

1. VNitas (sive integrum unumquodque) concipi mente potest in quotcunque æquales partes divisibilis: quæ quidem partes denominationem ex numero suo, quem unitas continet, sortiuntur: ut si unitas intelligatur dividi in binas æquales partes, dicuntur secundæ; si in tres, tertiæ: & sic de reliquis.

2. Scribuntur partes duobus terminis cum lineola interjecta: quorum inferior denotat unitatem divisam in totidem æquales partes; & dicitur Denominator. Superior verò ostendit quot ex partibus illis significantur; atque ideò dicitur Numerator. Ut 4 numerator, 5 denominator, & significant quatuor quintas partes, sive quatuor partes unius integri divisi quinquifariam.

3. *Quam igitur rationem habet numerator ad denominatorem, eandem habet quantitas significata ad unitatem.* 4.5::$\frac{4}{5}$.1.   R.S::$\frac{}{S}$.1.

4. Et quia ratio quævis terminis innumeris similiter sese adinvicem habentibus (quorum quidem maximi dari nequeunt) poterit exprimi: sequitur partes etiam easdem, non iisdem solummodò numeris, sed aliis infinitis, posse designari. Ut quincuncem significant non modo $\frac{5}{12}$, qui minimi sunt termini in eandem ratione

ratione, ſed etiam $\frac{10}{24}, \frac{20}{48}, \frac{25}{60}, \frac{45}{108}$: & quotcunque alii numeri fiunt multiplicando 5 & 12 in alium quemvis numerum, per 2 cap. 6.

5. Quare æqualium partium, ſive fractionum, termini ſunt proportionales, & contra.

6. Item, ſi partium numerator minor ſit denominatore, partes ſunt unitate minores: ſi æqualis, ſignificant unitatem: & ſi major, partes unitatem excedunt, eadem ratione, qua denominator à numeratore ſuperatur. Reducuntur autem ad unitates dividendo numeratorem per denominatorem: ut $\frac{31}{7}$ ſunt $4\frac{3}{7}$ item $\frac{CR+SA}{R}$ eſt $C+\frac{SA}{R}$. Et contra integri, ſive unitates reſolvuntur in partes cujuſque generis multiplicando unitates per denominatorem earundem partium, ut 1 fiet $\frac{2}{2}$, vel $\frac{3}{3}$, &c. & $4\frac{3}{7}$ fient $\frac{18+3}{7}$, hoc eſt $\frac{31}{7}$. Item $C+\frac{SA}{R}$ fiet $\frac{CR+SA}{R}$.

Cap. IX.

DE ADDITIONE ET *Subductione partium.*

1. SI partes propoſitæ diverſarum ſint ſpecierum: Primò reducendæ ſunt ad eandem denominationem, dividendo denominatores per maximam ipſorum communem menſuram; & multiplicando terminos per alternos quotos. Deinde in numeratoribus

ribus partium inventarum ejuſdem denominationis additio vel ſubductio inſtituenda eſt. Et ſummæ denique, vel differentiæ, communis ille denominator ſubſcribendus.

2. Et ſi integri partibus ſint immixti, ſeorſim tamen ſunt numerandi. *E*xempli gratia: *E*x $6\frac{1}{18}$ tollatur $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$. Primò addendæ ſunt $\frac{13}{16}$ & $2\frac{7}{12}$ eruntque 2 & $\frac{39+28}{48}$ vel $\frac{67}{48}$, nempe $3\frac{19}{48}$: quibus demptis é $6\frac{1}{18}$ reſtabunt $2\frac{95}{144}$ ut in exemplo

$$\begin{array}{c} 67 \\ 39+28 \\ \cancel{13}\quad \cancel{7} \\ \overline{}\ 2\ \overline{} \\ 4)\ \cancel{16}\quad \cancel{12} \\ \underbrace{4\quad 3}_{48} \end{array} \quad \text{eſt} \quad \begin{array}{c} 57 \qquad\quad 8 \\ \cancel{19} \qquad\quad 1 \\ 3\ \overline{}\ \text{è}\ 6\ \overline{} \\ \cancel{48} \qquad\quad \cancel{18} \\ 6)\ \underbrace{8 \qquad\quad 3}_{144} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{è}\ 5\frac{152}{144} = 6\frac{8}{144} \\ \text{tolle} \\ 3\frac{57}{144} \\ \text{manet} \\ 2\frac{95}{144} \end{array}$$

Adde $\frac{A}{B}$ & Z, ſumma $\frac{A+ZB}{B}$ $\qquad \frac{BE+DA}{B+D}$

Ex $\frac{A}{B}$ tolle $\frac{B}{C}$ reſtat $\frac{CA-Bq}{BC}$ $\quad C)\ \overline{CA}\ CE$

$$\underbrace{A \quad E}_{CAE}$$

Cap. X.

DE MULTIPLICATIONE ET Divisione Partium.

1. Multiplicatio comparat heterologos terminos (hoc est reducit ad mimimos) & multiplicat homologos.

2. Divisio comparat homologos terminos, & multiplicat heterologos.

3. Et si integri partibus sint immixti, resolvendi sunt integri in partes.

Exempla Multiplicationis.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \text{ in } \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}} \text{ fit } \frac{5}{12} \;\Big|\; \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9} \text{ in } \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} \text{ fit } \frac{20}{27} \;\Big|\; \frac{5}{1} \text{ in } 3\,\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4} \text{ fit } \frac{65}{4} \left(16\tfrac{1}{4} \right.$$

$$\frac{A}{B} \text{ in B fit A} \;\Big|\; \frac{A}{B} \text{ in Z fit } \frac{ZA}{B} \;\Big|\; \frac{A}{B} \text{ in } 3\,\frac{ZA}{C} \text{ fit } \frac{ZAq}{BC}$$

Exempla divisionis.

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \Big) \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{5}{\cancel{28}}} \Big(\frac{20}{21} \;\Big|\; \frac{8}{\underset{3}{\cancel{15}}} \Big) \cancel{7} \; \frac{\overset{37}{=}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \Big(\frac{111}{8} \Big(13\,\frac{7}{8} \;\Big|\; \frac{\cancel{3}}{4} \Big) \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{1} \Big(\frac{12}{1}$$

$$\frac{D}{1} \Big) \frac{Aq}{B} \Big(\frac{Aq}{DB} \;\Big|\; \frac{A}{D} \Big) \frac{BC}{1} \Big(\frac{BCD}{A} \;\Big|\; \frac{A}{B} \Big) \frac{BC}{1} \Big(\frac{BqC}{A}$$

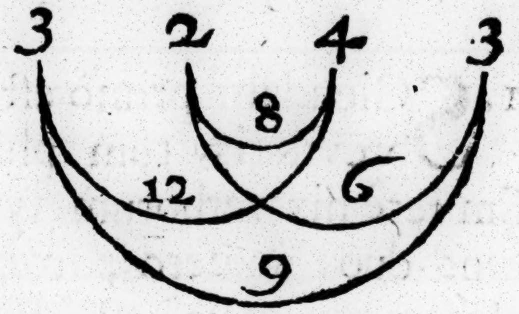
$$\frac{B}{A} \Big) \frac{BC}{1} \Big(\frac{CA}{1} \;\Big|\; \frac{Ac}{C} \Big) \frac{Bc}{D} \Big(\frac{BcC}{DAc}$$

4. Quis

4. Quis numerus est $\frac{2}{7}$ è 21? Multiplica 21 per $\frac{2}{7}$, Nam 1. $\frac{2}{7}$::21.6. vel 7.2::21.6.

5. Cujus numeri 6 continet $\frac{2}{7}$? Divide 6 per $\frac{2}{7}$. Nam $\frac{2}{7}$. 1::6.21. vel 2.7::6.21.

6. Apud antiquos Musicæ Scriptores, termini multiplicandi in rationum sive continuatione, sive imminutione, connectuntur lineolis curvis, in hunc modum: si rationes sint 3 ad 2, & 4 ad 3.



7. Rationum continuatio fit per Multiplicationem ipsarum, ac si essent fractiones. Continuentur rationes, 3 ad 2, & 4 ad 3: idem est ac si dicatur, multiplicentur $\frac{3}{2}$ in $\frac{4}{3}$, fientque $\frac{12}{6}$, quæ dupla est ratio. Quare ratio sesquialtera continuata cum ratione sesquitertiâ facit duplam: vel ut loquuntur Musici, ex diapente & diatessaron fit diapason.

Rationum imminutio fit per Divisionem: ut è ratione 3 ad 2 detrahenda sit 4 ad 3: Idem est ac si jubeatur $\frac{3}{2}$ dividi per $\frac{4}{3}$ restabitque $\frac{9}{8}$: nam $\frac{4}{3}$) $\frac{3}{2}$ ($\frac{9}{8}$ ratio sesquioctava: quæ mensura est Toni integri. Unde dicunt Musici quod differentia inter diapente & diatessaron est Tonus. Ut in hâc lineâ sive chordâ divisa in duodecim partes.

12 9 8 6 0

CAP. XI.

Exempla aliquot facillima, quibus quæ hactenus tradita ſunt familiaria redduntur: Et via ad Æquationem Analyticam ſternitur.

1. SCiendum primò eſt, quod inſequentibus, tum brevitatis, tum phantaſiæ juvandæ gratia, paſſim ferè his verborum ſymbolis utor. A & E ſignificant duos numeros, ſive magnitudines; quorum A plerumque major eſt, E minor. Æ rectangulum ſub ipſis. Z eſt ſumma. X differentia. Zq ſummæ quadratum. Xq differentiæ quadratum. **Z** ſumma quadratorum. X differentia quadratorum Z ſumma cuborum. X differentia cuborum. A, **M**, **E**, ſunt tres continuè proportionales: A, M, N, E, quatuor. Q: C: QQ: QC: &c. præfixæ magnitudinibus inter duo utrinque puncta incluſis, ſignificant illiuſmodi poteſtates. √ denotat radicem ſive latus poteſtatis ſimplicis, ſi non intercedant duo puncta: Si vero poteſtas duobus utrinque punctis includatur, ſignificat latus ipſius univerſale: quod etiam aliter per literam b vel r deſcribi ſolet, ut √b latus eſt Binomii, & √r latus Reſidui ſive Apotomes. = nota eſt æqualitatis.

2. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum major eſt A, minor E: quænam eſt ipſorum ſumma? quæ differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia? quæ ſummæ & differentiæ ipſorum ſumma? quæ ſum-

mæ

mæ & differentiæ ipſorum differentia? quod ſummæ & differentiæ ipſorum rectangulum? quod ſummæ quadratum? quod differentiæ quadratum? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ ſumma? quæ quadratorum ſummæ & differentiæ dfferentia? quod quadratum rectanguli?

Z eſt $A+E$. X eſt $A-E$. $Æ$ eſt AE.

$\mathbf{Z} = Aq+Eq$ $\mathbf{X} = Aq-Eq$.

$Z+X = 2A$ $Z-X = 2E$.

$\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}X = A$. $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}X = E$.

$ZX = Aq-Eq = \mathbf{X}$. $Zq.\mathbf{X} :: Z.X$.

$Zq = Aq+2AE+Eq = \mathbf{Z}-2Æ$.

$Xq = Aq-2AE+Eq = \mathbf{Z}+2Æ$.

$Zq+Xq = 2Aq+2Eq = 2\mathbf{Z}$.

$Zq-Xq = 4AE$. $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Xq = Æ$.

$Æq = AqEq$.

3. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum ſumma eſt Z, & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum differentia? quod ſub ipſis rectangulum? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$E = Z-A$. $X = 2A-Z$. $Æ = ZA--Aq$.

$\mathbf{Z} = Zq-2ZA+2Aq$. $\mathbf{X} = 2ZA-Zq$.

Si vero minor ex ipſis ponatur E:

$A = Z-E$ $X = Z-2E$. $Æ = ZE-Eq$.

$\mathbf{Z} = Zq-2ZE+2Eq$. $\mathbf{X} = Zq-2ZE$.

4. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum differentia eſt X, & major ex ipſis ponitur A: quiſnam

nam est minor? quæ ipsorum summa? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia?

$E = A - X$. $Z = 2A - X$. $Æ = Aq - XA$.
$Z = 2Aq - 2XA + Xq$. $X = 2XA - Xq$.

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = E + X$ $Z = 2E + X$ $Æ = Eq + XE$.
$Z = 2Eq + 2XE + Xq$. $X = 2XE + Xq$.

5. Sunt duo numeri sive magnitudines, quorum major ad minorem, rationem habet R ad S; & major ex ipsis ponitur A: quisnam est minor? quæ ipsorum summa? quæ ipsorum differentia? quod sub ipsis rectangulum? quæ quadratorum summa? quæ quadratorum differentia.

$E = \frac{SA}{R}$. $Z = \frac{RA + SA}{R}$. $X = \frac{RA - SA}{R}$.
$Æ = \frac{SAq}{R}$. $Z = \frac{RqAq + SqAq}{Rq}$. $X = \frac{RqAq - SqAq}{Rq}$.

Si vero minor ex ipsis ponatur E:

$A = \frac{RE}{S}$. $Z = \frac{RE + SE}{S}$. $X = \frac{RE - SE}{S}$.
$Æ = \frac{REq}{S}$. $Z = \frac{RqEq + SqEq}{Sq}$. $X = \frac{RqEq - SqEq}{Sq}$.

6. Sunt

6. Sunt duo numeri ſive magnitudines, quorum rectangulum eſt Æ; & major ex ipſis ponitur A: quiſnam eſt minor? quæ ipſorum ſumma? quæ ipſorum differentia? quæ quadratorum ſumma? quæ quadratorum differentia?

$$E = \frac{Æ.}{A} \qquad Z = \frac{Aq + Æ.}{A} \qquad X = \frac{Aq - Æ.}{A}$$

$$Z = \frac{Aqq + Æq.}{Aq} \qquad X = \frac{Aqq - Æq.}{Aq}$$

Si vero minor ex ipſis ponatur E:

$$A = \frac{Æ.}{E} \qquad Z = \frac{Æ + Eq.}{E} \qquad X = \frac{Æ - Eq.}{E}$$

$$Z = \frac{Æq + Eqq.}{Eq} \qquad X = \frac{Æq - Eqq}{Eq}$$

7. Atque ex his comparatis multæ æqualitates oriuntur. Exempla ſumemus in ſumma & Differentia.

$$Z = A + E = 2A - X = 2E + X = \frac{Aq + Æ}{A} = \frac{Æ + Eq}{E} \text{ \&c.}$$

$$X = A - E = 2A - Z = Z - 2E = \frac{Aq - Æ}{A} = \frac{Æ - Eq}{E} \text{ \&c.}$$

Hoc modo etiam in reliquis comparationes poterunt inſtitui, quibus eadem magnitudo multas admittet interpretationes atque diverſitates.

Cap. XII.

DE GENESI, ET ANALYSI POTESTATUM.

1. Quia omnia resolvuntur in easdem partes, ex quibus coagmentantur: primò scire oportet ex quibus partibus quælibet potestas constituitur. Potestates autem fiunt à radice aliquoties in se multiplicatâ. Nam latus in se ductum facit quadratum: Quadratum ductum in latus facit cubum: Cubus ductus in latus suum facit quadrato-quadratum, quæ potestas est quartana $\boxed{4}$: hæc iterum ducta in latus facit quadrato-cubum, scilicet quintanam $\boxed{5}$: Et sic ulteriùs progrediendo fiunt potestates sextana $\boxed{6}$, septimana $\boxed{7}$, octavana $\boxed{8}$, nonana $\boxed{9}$, decumana $\boxed{10}$, & reliquæ, pro numero dimensionum suarum, ex quibus componuntur.

2. Quare potestatum à radice singulari, quæ unica figura, sive nota, constat, procreatio nihil habet difficultatis.

TA.

TABULA PRIOR POTESTATUM A RADICE SINGULARI.

L N	[2] q	[3] c	[4] qq	[5] qc	[6] cc	[7] qqc	[8] qcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679516
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

3. Quæ verò à radice binarum notarum exſurgunt, hunc habent ortus ſui modum.

Geneſis poteſtatum à radice qinomia.

$A+E$
$A+E$

$Aq+AE$
$\quad +AE+Eq$

$Aq+2AE+Eq$. Quadratum
$\quad A+E$

$Ac+2AqE+AEq$
$\quad +AqE+2AEq+Ec$

$Ac+3AqE+3AEq+Ec$. Cubus
$\quad A+E$

$Aqq+3AcE+3AqEq+AEc$
$\quad +AcE+3AqEq+3AEc+Eqq$

$Aqq+4AcE+6AqEq+4AEc+Eqq$. Quadrato-quadrat.
$\quad A+E$ &c.

4. Atque hoc artificio conficietur tabula poteſtatum aſcendentium in ſcala à radice binomia: quæ *POSTERIOR* vocetur.

AE

Latus sive numerus	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqccE	10AcccE
	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
			Eqq	5AEqq	15AqEqq	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	310AccEqq
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
							Eqcc	9AEqcc	45AqEqcc
								Ecce	10AEccc
E									Eqqcc

5. Quælibet species intermedia cujusque ordinis componitur ex duabus speciebus ordinis præcedentis utrinque proximis: nempe A potestate superioris speciei, & E potestate inferioris. Numerus etiam affigendus ex utroque numero iisdem affixo, aggregatur. Quare continuari facile poterit hæc tabula ulterius pro libitu.

6. In hâc tabulâ duæ extremæ potestates singulorum generum sunt diagonales: & species intermediæ sunt complementa: quibus affixæ sunt *unciæ*, ostendentes numerum complementorum in constitutione cujusque potestatis sumendorum. Complementa autem omnia, cum E potestate, Gnomon non ineptè dici poterit.

7. Ex hâc tabulâ etiam liquet, quod quadratum à radice binarum notarum constat ex diagonalibus quadratis utriusque notæ, & duplice rectangulo sub ipsis notis. Cubus autem constat ex cubis diagonalibus & triplice solido sub quadrato majoris notæ & notâ minore, & triplice item solido sub majore notâ & quadrato minoris. Quod similiter de reliquis quoque potestatibus est efferendum.

8. Ostendit insuper plena hæc mysteriis pulcherrimis tabella, in numerosa potestate, sedes tum potestatum singularium sive diagonalium, tum cujusque speciei complementorum. Nam cùm inter bina quadrata unica est species, quadratorum sedes unicum interponent pro complementis locum. Et cum inter binos cubos duæ sunt complementorum species, cuborum sedes binos interponent locos complementis suis ordine distribuendos.

Cap. XIII.

His itaque præmissis ad GENESIN. Potestatum accedamus.

1. PRoponatur Genesis quadrati à latere 57. major igitur nota A est 5, minor E est 7. Scribantur 5 & 7 intermissio unius gradus spatio: & linea sub ipsis ducatur. Sub 5 statuatur quadratum suum 25: & sub 7 suum 49. tum duplicetur 5, & multiplicetur per 7, fietque duplum rectangulum 70, ponendum loco intermedio. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 3249 pro quadrato lateris 57 quæsito.

5	7		
25		Aq	
7	0	2AE	gnomon.
	49	Eq	
32	49		

2. Proponatur iterum Genesis cubi à latere 57 scribantur 5 & 7 intermisso duorum graduum spatio: & linea sub ipsis ducatur. sub 5 statuatur cubus suus 125: & sub 7 suus 343. tum quadratum à 5 triplicetur, & multiplicetur per 7, fietque triplum solidum majus 525, ponendum loco priore intermedio: item triplicetur 5, & multiplicetur per 49 quadratum à 7, fietque triplum solidum minus 735, ponendum loco

5	7		
125	Ac		
52	5	AqE	
7	35	3AEq	gnomon.
	343	Ec	
185	193		

loco intermedio secundo. addantur omnia suis quæque locis: summa erit 185193 pro cubo lateris 57 quæsito.

3. Si latus propositum constet pluribus figuris, ut 57209: Primò potestas duarum primarum figurarum 57 quærinda est. Deinde sumptis 57 pro A, & figura 2 sequente pro E: quæratur potestas ipsius eodem, qui aute ostensus est tabellæ ordine. Quod etiam in reliquis figuris singulatim est faciendum.

```
 5 | 7| 2| 0| 9|                    Radix
25 |   | Aq
  7|0  | 2Æ  } gnomon.
   |46 | q
----------------
32 |49 |  | Aq
   |22 |8 | 2Æ  } gnomon.
   |   |4 | Eq
------------------------------
32 |71 |84 |00 |    | Aq
   | 1 |02 |96 |0   | 2Æ  } gnomon.
   |   |   |   |81  | Eq
------------------------------
32|72|86|96|81                Quadrat.
```

5	7	21	01	9	Radix.	
125					Ac	
52	5				3AqE	
7	35				3AqE	Gnomon.
	343				Ec	
185	193				Ac	
1	949	4			3AqE	
	6	84			3AEq	Gnomon.
		8			Ec	
187	149	248	000		Ac	
	88	339	680	0	3AqE	
		13	899	60	3AEq	Gnomon.
				729	Ec	
187	237	601	580	329	Cubus.	

4. Ex his, quæ jam declarata sunt, non difficile erit reliquas etiam omnes superiorum generum potestates progignere: modò in ipsarum genitura inferiorum omnium ad ipsas adscendentium potestatum vides.

Cap. XIV.

Sequitur ANALYSIS: quæ est eductio radicis ex numerosa potestate data.

1. ANalyſis, poſtquam ſedes poteſtatum, pro ſuo quaſque juxta tabulam genere, punctis, poſito primo puncto ſub loco unitatum, diſtinxerit: primò ex figuris primi à ſiniſtra puncti poteſtatem diagonalem comprehenſam tollit: latuſque ipſius, quod A vocetur, in margine ſcribit. tum numero reliquo, ad proximum uſque punctum (qui gnomonem intelligitur continere) per diviſorem ex latere A invento legitimè conflatum, diviſo, ſecundum latus E quærit & in margine ſcribit: per quod demùm gnomonem perficit: perfectumque ex reliquo illo ſubtrahit. Et ſic integra duorum primorum ſingularium laterum, in duobus primis punctis contenta, poteſtate ademptа, reſtabit ad tertium uſque punctum gnomon pro tertio latere ſimiliter eruendo.

Analyſis

Analysis quadrati.

1		
723	02	
3272	8696	81 (57209
· ·	· ·	· punctatio
28	Aq	
10	2A	Divisor.
70	2AE	
49	Eq	
749		Gnomon.
11	4 2A	Divisor.
22	8	2AE
	4	Eq
22	84	Gnomon.
1	144	21 Divisor.
	1144	0 2A Divis:
1	0296	0 2AE
		81 Eq
1	0296	81 Gnomon.

Analysis Cubi.

2 | 088
62 | 044 | 3 5 3
187 | 237 | 6 0 1 | 5 8 0 | 329 (57209

125 | | Ac

7 | 5 | 3Aq
| 15 | 3A
7 | 65 | divisor
52 | 5 | 3AqE
7 | 15 | 3AqE
| 343 | Ec
60 | 193 | gno- | mon.

| 9747 | 7 | 3Aq
| 1 | 7 | 1 | 3A
| 976 | 4 | 1 | divi- | sor
1 | 949 | 4 | 3AqE
6 | 84 | 3AEq
| 8 | Ec
1 | 956 | 28 | gno- | mon

98 | 1 5 5 | 2 | 3Aq
| 1 7 | 16 | 3A
98 | 1 7 2 | 36 | divisor

9 | 8 1 5 | 5 2 0 | 0 3Aq
| | 1 7 1 | 60 3A
9 | 8 1 5 | 6 9 1 | 60 divisor
88 | 3 3 9 | 6 8 0 | 0 3AqE
| 1 3 | 8 9 9 | 60 3AEq
| | | 729 Ec
88 | 5 5 | 5 5 8 | 0 | 329 gnomon.

57 | 2 | 0
25
70
| 49
32 | 49
| 228
| 84
3271 | 4

2. Si

2. Si numerus propositus non sit verus sui generis figuratus, sed peracta Analysi aliquid restet: punctationes circulorum pro suo genere, quot opus erit, statuendæ sunt: & continuanda Analysis post lineam separatricem.

3. Ex his etiam quæ declarata sunt, non difficile erit ope tabellæ radices ex superioribus potestatibus omnibus educere.

Cap. XV.

DE LATERIBUS SURDIS.

1. SI quotlibet numeri sint continuè proportionales: Erit ut primus ad ultimum, sic potestas primi æquimultiplicata numero terminorum minus uno, ad potestatem similem secundi. Sunto quatuor ∺ A,M,N,E.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l}A.\,M::A.N\\ M.N::A.M\\ N.\,E::A.M\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Erit per Multiplicatio-}\\ \text{nem } A.E::Ac.\ Mc.\end{array}$$

2. Numeri plani vel solidi similes sunt, quorum latera homologa sunt proportionalia.

3. Numeri plani similes sunt in duplicatâ ratione (hoc est, ut quadrata) homologorum laterum. Sunt igitur numeri plani similes, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. Item numeri solidi similes sunt in triplicata ratione (hoc est, ut Cubi) homologorum laterum. Sunt igitur numeri solidi similes, ut numerus Cubicus ad numerum Cubicum.

4. Et

4. Et generaliter omnes figurati ſimiles plurimum dimenſionum, ſunt in ratione homologorum laterum, æquimultiplicata numero dimenſionum, ex quibus componuntur. Dimenſiones ſunto quatuor, nempe A B C D unius, & E F G H alterius, in ratione R ad S.

$$\text{Quia}\left\{\begin{array}{l}A.\,E :: R.S\\ B.\,F :: R.S\\ C.G :: R.S\\ D.H :: R.S\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Erit per multiplicationem}\\ ABCD.\ EFGH :: Rqq.\ Sqq.\end{array}$$

5. Si numerus non ſit verus ſui generis figuratus, latus ejus dicitur ſurdum. & ſic notatur, √q6, √c4, √qq20, √qc13 : hoc eſt latus quadrati 6, latus cubi 4, latus quadrato-quadrati 20, latus quadrato-cubi 13. &c.

6. Latera ſurda commenſurabilia ſunt, quorum numeri ad minimos terminos reducti, fiunt veri ſui generis figurati : ſuntque idcirco ut numerus ad numerum, ut √q12 & √q147 reducta ad minimos terminos per √q3 maximam utriuſque communem menſuram, fiunt √q4 & √q49, hoc eſt 2 & 7 : quare cum √q12 & √q147 ſint ut 2 ad 7, erunt commenſurabilia. Sic √c40 & √c1715 ſunt ut 2 ad 7, quoniam diviſa per maximam ſuam communem menſuram √c5, fiunt √c8 & √ c343 ; ideoque commenſurabilia.

7. Adduntur autem, atque ſubtrahuntur, latera ſurda commenſurabilia, ſi ſummæ, vel differentiæ, numerorum ipſis ſimilium inventorum homogenea

poteſtas

poteſtas ducatur in communem ipſorum menſuram. Ut $\surd q147 + \surd q12$ eſt $\surd q243$; hoc eſt latus quadrati à $7 + 2$ (nempe 81) ductum in $\surd q3$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd q147 - \surd q12$ eſt $\surd q75$; hoc eſt latus quadrati à $7 - 2$ (nempe 25) ductum etiam in $\surd q3$.

Item $\surd c1715 + \surd c40$ eſt $\surd c3645$, hoc eſt latus cubi $7 + 2$ (nempe 729) ductum in $\surd c5$ maximam ipſorum communem menſuram. Et $\surd c1715 - \surd c40$ eſt $\surd c625$, hoc eſt latus cubi à $7 - 2$ ductum etiam in $\surd c5$.

Additionis & ſubductionis operatio talis eſt.

$$
\begin{array}{lllllll}
\surd q3) & \surd q147 & (\surd q49.\,7 & & \surd c5) & \surd c1715 & (\surd c343.\;7 \\
 & \surd q12 & (\surd q4.\,2. & & & \surd c\;40 & (\surd c8.\;2 \\
\hline
 & \surd q243 & \surd q81.\,9 & \text{ſumma} & & \surd c3645 & \surd c729.\;9 \\
 & \surd q75 & \surd q25.\,5 & \text{differ.} & & \surd c625 & \surd c125.\;5
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll|lll}
 & \surd 12 & +\surd \frac{27}{4} & & \surd \frac{245}{12} & + \surd \frac{5}{12} \\
 & \text{vel} & & \surd 5) & \surd 245 & (\surd 49.\;7 \\
 & \surd \frac{48}{4} & +\surd \frac{27}{4} & & \surd 5 & (\surd 1.\;1 \\
\cline{2-3}\cline{5-6}
\surd 3) & \surd 48 & (\surd 16.\;4 & & \surd \frac{320}{12} & \surd 64.\;8 \\
 & \surd 27 & (\surd 9.\;3 & & \surd \frac{180}{12} & \surd 36.\;6 \\
\cline{2-3}
 & \surd \frac{147}{4} & \surd 49.\;7 & & & \\
 & \surd \frac{3}{4} & \surd 1.\;1 & & &
\end{array}
$$

8. Latera verô ſurda incommenſurabilia, atque heterogenea, adduntur, vel ſubtrahuntur, ſignis + vel − ut $\surd q7 + \surd q4$. & $\surd c10 - \surd c5$.

9. Si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum multiplicetur, factus erit numerus ejuſdem

ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est facto à lateribus numerorum multiplicatorum. Et si numerus figuratus per numerum figuratum homogeneum dividatur, quotus erit numerus ejusdem generis figuratus, cujus latus æquale est quoto lateris Dividendi ad Divisoris latus applicati. Ut factus à numeris cubicis 343 & 27 est 9261, numerus etiam cubicus, cujus latus est 7×3. Item $\sqrt{q}\frac{AqEq}{Bq}$ est $\frac{AE}{B}$.

10. Quare laterum surdorum homogeneorum multiplicatio, & divisio, procreat latus etiam surdum homogeneum: ut $\sqrt{q7}$ in $\sqrt{q3}$ est $\sqrt{q21}$. Et $\sqrt{q7})\,\sqrt{q21}\,(\sqrt{q3}$: vel $\sqrt{q}\frac{21}{7}$ est $\sqrt{q3}$. Item $\sqrt{qA}$ in $\sqrt{qE}$ est $\sqrt{qAE}$. Et $\sqrt{qA})\,\sqrt{qAE}\,(\sqrt{qE}$: vel $\sqrt{q}\frac{AE}{A}$ est $\sqrt{qE}$.

11. Latera verò heterogenea non multiplicantur, vel dividuntur, nisi prius ad idem genus reducuntur, quod fit dividendo indices utriusque potestatis propositæ per maximam ipsorum communem mensuram: & multiplicando tum Indices per alternos quotos: tum ipsas potestates in species alternis quotis cognomines. Ut si ad multiplicandum vel dividendum, proponatur $\sqrt{qq10}$ & $\sqrt{cc7}$. Primò reducuntur ad $\sqrt{cccc\,1000}$, & $\sqrt{cccc49}$: cubando 10, & quadrando 7: Tum demùm fiat multiplicatio, vel divisio. Sic etiam $\sqrt{qqA}$, & $\sqrt{ccBq}$ reducuntur ad $\sqrt{ccccAc}$, & $\sqrt{ccccBqq}$: uti planiùs apparebit per praxim, quæ hic apponitur.

$\surd[12]1000\ \surd[12]49 \qquad \surd[12]Ac\surd[12]Bqq$
$[2])\ \surd[4]10 \quad \surd[6]7 \quad [2])\ \surd[4]A \quad \surd[6]Bq$
$[2] \qquad [3] \qquad [2] \qquad [3]$

Rurſus ſi $\surd c32$ duplicandum ſit, vel multiplicandum per 2: pro 2 ſumatur $\surd c8$: & per ipſum multiplicetur $\surd c32$; fietque $\surd c256$, equivalens bis $\surd c32$.

Item ſi dimidiandum ſit $\surd c32$, vel dividendum per 2: pro 2 ſumatur $\surd c8$: & per ipſum dividatur $\surd c32$; orieturque $\surd c\frac{32}{8}$; hoc eſt $\surd c4$, æquivalens $\frac{1}{2}\surd c32$.

Sic etiam $\frac{22}{7}\surd qAq$, fiet $\surd q\frac{484}{49}Aq$, hoc eſt $\frac{22}{7}A$.

12. Si latus poteſtatis multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam ſuæ ſpeciei: deleatur nota ſpeciei lateralis: ut Q: $\surd q64$, vel C: $\surd c64$, eſt 64.

13. Et ſi latus poteſtatis, cujus index eſt numerus compoſitus, multiplicandum ſit ſecundùm exigentiam alterutrius ſpeciei componentis: latus alterius ſpeciei numero ſpeciali ſolùm præfigatur: ut Q: $\surd cc64$ eſt $\surd c64$ & C. $\surd cc64$ eſt $\surd q64$. Nam $\surd cc$ eſt $\surd[2\times 3]$

14. Si magnitudo plurium nominum, ducatur in ſeipſam, cum uno ex ſuis ſignis mutato; expurgabitur unum nomen. Ut $3+\surd5\pm\surd2$ in $3+\surd5-\surd2$, fiet $12+\surd180$.

Cap. XVI.

DE ÆQUATIONE. & De quæstionibus per Æquationem solvendis.

1. QUotiescunque problema aliquod, sive quæstio, proponitur: Puta præstitum esse quod postulatur: aptâque adhibita ratiocinatione, pro quæsita magnitudine ponatur A, vel alia aliqua vocalis: pro magnitudinibus autem datis consonantes: quò facilius magnitudines datæ ab incertis dignoscantur.

2. Deinde magnitudines, tam datæ, quam quæsitæ, secundum conditionem quæstioni convenientem, efformentur atque comparentur, addendo, subtrahendo, multiplicando, & dividendo donec tandem aliquid inveniatur magnitudini, de qua quæritur, vel suæ, ad quam ascendet, potestati æquale.

3. Et quia in omni ferè æquatione, ubi primò ex involucris quæstionis effulget, nota cum ignotis confunduntur: termini ipsius ita sunt ordinandi, ut quæ in data habentur mensura, faciant unam partem, & quæ ignota quæruntur, alteram. Quod quo artificio fiat, regulę quinque sequentes commonstrabunt.

4. Primò si magnitudo quæsita, vel aliquis ejus gradus, sit in fractione: fiat omnium magnitudinum ad unam denominationem reductio: ut, omisso communi illo denominatore, in solis numeratoribus æquatio censeatur. Ut $A - C = \frac{Aq + Bq}{D} + B + C$: Erit $DA - DC = Aq + Bq + DB + DC$.

5. Secundò, si quæ in data habentur mensura, im-

misceantur

misceantur cum quæsitis: *fiat transpositio magnitudinum ex una parte in aliam sub contrario signo.* Ut DA-DC=Aq+Bq+DB+DC: Et transpositis DC & Aq, erit DA-Aq=2DC+DB+Bq. Quæ etiam regula in omni transpositione servanda est.

6. Tertiò, si species altissima quæsitæ magnitudinis ducatur in magnitudinem aliquam datam; fiat omnium magnitudinum æquationis ad illam communis applicatio. Ut BAq+BqA=Zc, erit Aq+BA=$\frac{Zc}{B}$

7. Quarto, si contingat omnes datas magnitudines duci in gradum aliquem magnitudinis quæsitæ: fiat omnium, per applicationem ad minimam speciem, secundum ordinem tabellę, communis depressio. Ut Aqq+BAc=ZqAq, erit Aq+BA=Zq, expuncto in singulis Aq. Atque hoc modo æquatio quælibet proposita poterit deprimi, sive reduci ad minores species; Si terminorum omnium fiat ad eundem gradum communis applicatio. Ut Ac+XAq=Nc, divisa per A, fiet Aq+XA=$\frac{Nc}{A}$: at divisa per Aq, fiet A+X=$\frac{Nc}{Aq}$ Quæ quidem operatio in numerosa affectarum æquationum resolutione usus erit non contemnendi: quia latus quæsitum facilius æstimatur in minoribus potestatibus, quam in majoribus.

8. Quintò, si magnitudo aliqua sit latus surdum: æquatio in ipsis potestatibus est instituenda. Ut $\sqrt{q}$BA+B=C: vel per transpositionem $\sqrt{q}$BA =C-B. Ideoque ipsorum quadrata, BA=Cq -2CB+Bq: vel A=$\frac{Cq\text{-}2CB+Bq}{B}$.

Item $\sqrt{u}$: $BA+CA:-D=B$. Vel $\sqrt{u}$: $BA+CA:=D+B$. Ideoque & ipſorum quadrata $BA+CA=Bq+2BD+Dq$: vel $A=\frac{Bq+2BD+Dq}{B+C}$. Denique

$\sqrt{q}\frac{A}{3}=\sqrt{c2A}$: vel per 11 c 15, $\sqrt{qc}\frac{Ac}{27}=\sqrt{qc4Aq}$. quare $Ac=108Aq$. Et $A=108$.

9. Æquationum, in quibus ſunt tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes, conſtitutio liquebit ex ſect: 2, 3, 4, capitis 11: Nam quia.

$Z-A=E$: ducatur utraque pars in A.
$Z-E=A$: ducatur utraque pars in E.
$A-X=E$: ducatur utraque pars in A.
$E+X=A$: ducatur utraque pars in E.
Et ſimiliter fiat in Z & X, &c.

Atque hac multiplicatione hujuſmodi orientur æquationes.

$ZA-Aq=\text{Æ}$	$Aq-XA=\text{Æ}$
$ZAq-Aqq=\text{Æq}$	$Aqq-XAq=\text{Æq}$
$ZAc-Acc=\text{Æc}$	$Acc-XAc=\text{Æc}$
&c	&c
$ZE-Eq=\text{Æ}$	$Eq+XE=\text{Æ}$
$ZEq-Eqq=\text{Æq}$	$Eqq+XEq=\text{Æq}$
$ZEc-Ecc=\text{Æc}$	$Ecc+XEc=\text{Æc}$
&c	&c

Quotieſcunque igitur proponitur Æquatio conſtans ex tribus ſpeciebus æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentibus: Cogitabis magnitudinem abſolutam

tam datam esse rectangulum sub duabus magnitudinibus quæsitis, sive latera sint, sive quadrata, sive Cubi, &c: qualis scil: est potestas mediæ speciei. In media autem speciei, si altissima species sit negata, coëfficientem esse summam magnitudinum quæsitarum; Et de utrâque exponi. At si altissima species sit affirmata, coëfficientem esse magnitudinum quæsitarum differentiam; ipsam autem speciem exponi de majore, negatam; vel de minore, affirmatam.

Tum datis binarum magnitudinum summa & rectangulo, datur earundem differentia: vel data differentia & rectangulo, datur summa. Nam per 2 Cap: XI.

$$\left.\begin{array}{l} Q: \tfrac{1}{2}Z:-Æ = Q: \tfrac{1}{2}X \\ Q: \tfrac{1}{2}X:+Æ = Q: \tfrac{1}{2}Z \end{array}\right\} \text{quare} \left\{\begin{array}{l} \sqrt{u}: \tfrac{1}{4}Zq - Æ: = \tfrac{1}{2}X. \\ \sqrt{u}: \tfrac{1}{4}Xq + Æ: = \tfrac{1}{2}Z. \end{array}\right.$$

Denique datis binarum magnitudinum $\tfrac{1}{2}Z$ & $\tfrac{1}{2}X$, dantur ipsæ magnitudines; hisce duabus Regulis.

$$\text{I Reg. } \tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{u}: \tfrac{1}{4}Zq - Æ: \; (\tfrac{1}{2}X) = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$$

$$\text{II Reg. } \sqrt{u}: \tfrac{1}{4}Xq + Æ: \; (\tfrac{1}{2}Z) \pm \tfrac{1}{2}X = \begin{matrix} A. \\ E. \end{matrix}$$

Atque hæ duæ sunt regulæ pro solutione Æquationis cujusque: in qua sunt tres species, æqualiter in ordine scalæ ascendentes.

10. GENESIS sex Binomiorum ex lateribus suis surdis. Regula est, Z + 2Æ = Zq.
In Apotomis verò, Z - 2Æ = Xq.

Exempl: I. Quadretur Binomium $4 + \sqrt{11}$. Hîc Z est 16+11, hoc est 27. Et Æ est $\sqrt{16} \times \sqrt{11}$, hoc est $\sqrt{176}$: cujus duplum est $\sqrt{704}$. Quadratum igitur erit $27 + \sqrt{704}$. Quod dicitur Binomium I.

Exempl:

Exempl: II. Quadretur Bimediale prius, $\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Hîc Z est $\sqrt{12} + \sqrt{\frac{27}{4}}$, vel $\sqrt{\frac{48}{4}} + \sqrt{\frac{27}{4}}$, hoc est $\sqrt{\frac{147}{4}}$, per 7, Cap: XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,12 \times \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$, vel $\sqrt{qq}\,3 \times \sqrt{qq}\,27$; hoc est, $\sqrt{qq}\,81$, scil: 3: cujus duplum est 6. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{147}{4}} + 6$: Quod dicitur Binomium II.

Exempl: III. Quadretur Bimediale posterius $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Hîc Z est $\sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{15}$, vel $\sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{\frac{45}{3}}$; hoc est $\sqrt{\frac{245}{3}}$, per 7, Cap. XV. Et Æ est $\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \times \sqrt{qq}\,15$, vel $\sqrt{qq}\,80 + \sqrt{qq}\,5$; hoc est $\sqrt{qq}\,400$, scil: $\sqrt{20}$: cujus duplum est $\sqrt{80}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{\frac{245}{3}} + \sqrt{80}$. Quod dicitur Binomium III.

In tribus reliquis, quę constat ex radicibus Binomii & Residui connexis, ut $\sqrt{b}$: A+E: pl $\sqrt{r}$: A−E: perspicuum est Z esse 2A: & Æ esse $\sqrt{}$:Aq−Eq: quare

Exempl: IV. Quadretur Major, $\sqrt{b}$: $\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}$: pl $\sqrt{r}$: $\frac{7}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}$. Hîc Z est $\frac{7}{2} + \frac{7}{2}$, hoc est, 7. & Æ est $\sqrt{u}$: $\frac{49}{4} - \frac{29}{4}$: hoc est, $\sqrt{\frac{20}{4}}$, scil: $\sqrt{5}$: cujus duplum est $\sqrt{20}$. Quadratum igitur erit $7 + \sqrt{20}$. Quod dicitur Binomium IV.

Exempl: V. Quadretur Potens rationale cum mediali, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5} + 1$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5} - 1$. Hîc Z est $\sqrt{5} + \sqrt{5}$; hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5−1: hoc est, $\sqrt{4}$, scil: 2: cujus duplum est 4. Quadratum igitur erit $\sqrt{20} + 4$. Quod dicitur Binomium V.

Exempl: VI. Quadretur Potens duo medialia, $\sqrt{b}$: $\sqrt{5} + \sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}$: $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Hîc Z est $\sqrt{5} + \sqrt{5}$, hoc est, $\sqrt{20}$. Et Æ est $\sqrt{}$: 5−3: hoc est, $\sqrt{2}$: cujus duplum est $\sqrt{8}$. Quadratum igitur erit $\sqrt{20} + \sqrt{8}$. Quod dicitur Binomium VI.

11. ANALYSIS. In Binomio igitur quadratico,

tico, majus nomen est Z : & minus nomen 2Æ. At in 2 Cap. XI, ordinatum est, $\frac{1}{4}$Zq-Æ $=$ $\frac{1}{4}$Xq: scil: $\frac{1}{4}$Q: A+E:-Æ $=$ $\frac{1}{4}$Q: A-E. Quare si pro A & E sumantur ipsarum quadrata Aq & Eq, erit $\frac{1}{4}$Q: Aq+Eq:-AqEq $=$ $\frac{1}{4}$Q: Aq-Eq : hoc est, $\frac{1}{4}$Zq-Æq $=$ $\frac{1}{4}$Xq, ex quo Theoremate pro Analysi Binomii deducitur hæc Regula.

$$\tfrac{1}{2}Z \pm \sqrt{q}: \tfrac{1}{4}Zq\text{-}Æq:(\tfrac{1}{2}X) = \begin{matrix} Aq. \\ Eq. \end{matrix}$$

Exempl: I. Quæratur latus Binomii I, 27+$\sqrt{}$704: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{27}{2}$ & Æ est $\sqrt{\frac{704}{4}}$: & $\frac{1}{4}$ Zq-Æq est $\frac{729}{4}$-$\frac{704}{4}$; hoc est, $\frac{25}{4}$: cujus latus $\frac{5}{2}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: $\begin{matrix} 27 & + & 5 \\ 2 & - & 2 \end{matrix} = \begin{matrix} 16. & 4 \\ 11. & \sqrt{11} \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est 4 + $\sqrt{}$11. Et dicitur Binomium I.

Exempl: II. Quæratur latus Binomii II, $\sqrt{\frac{147}{4}}$+6: nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{\frac{147}{16}}$: Et Æ est 3. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{147}{16}$-(9) $\frac{144}{16}$; hoc est $\frac{3}{16}$: cujus latus $\sqrt{\frac{3}{16}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Reg: $\sqrt{\frac{147}{16}} \pm \sqrt{\frac{3}{16}} = \begin{matrix} \sqrt{12}. & \sqrt{qq}\,12. \\ \sqrt{\frac{27}{4}}. & \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}. \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}$12+$\sqrt{qq}\frac{27}{4}$. Et dicitur Bimediale prius.

Exempl: III. Quæratur latus Binomii III, $\sqrt{\frac{245}{4}}$ +$\sqrt{}$80 : nempe Z+2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\sqrt{\frac{245}{12}}$: & Æ est $\sqrt{}$20. & $\frac{1}{4}$Zq-Æq est $\frac{245}{12}$ (20) $\frac{240}{12}$; hoc est $\frac{5}{12}$: cujus latus $\sqrt{\frac{5}{12}}$ est $\frac{1}{2}$X. At per Regul: $\sqrt{\frac{245}{12}} \pm \sqrt{\frac{5}{12}} =$ $\begin{matrix} \sqrt{\frac{80}{3}}. & \sqrt{qq}\,\frac{80}{3} \\ \sqrt{15}. & \sqrt{qq}\,15 \end{matrix}\Big\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{qq}\frac{80}{3}$+ $\sqrt{qq}$15. Et dicitur Bimediale posterius.

Exempl: IV. Quæratur latus Binomii IV, 7+$\sqrt{}$20; nempe Z, +2Æ. Quare $\frac{1}{2}$Z est $\frac{7}{2}$: & Æ est $\sqrt{}$5: & $\frac{1}{4}$Zq-Æq

 est

est $\frac{49}{4}-(5)\frac{20}{4}$; hoc est, $\frac{29}{4}$: cujus latus $\sqrt{\frac{29}{4}}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Reg. $\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{29}{4}} = \left.\begin{array}{l} \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}\ \sqrt{b}: \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}} \\ \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{22}{4}}\ \sqrt{r}: \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}} \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}: \frac{7}{2}+\sqrt{\frac{29}{4}}$ pl $\sqrt{r}: \frac{7}{2}-\sqrt{\frac{29}{4}}$: & dicitur Major.

Exempl: V. Quæratur latus Binomii V, $\sqrt{20}+4$: nempe $Z+1Æ$. Quare $\frac{1}{2}\sqrt{20}$ est $\sqrt{5}$: & Æ est 2: & $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $5-4$; hoc est 1, cujus latus 1 est $\frac{1}{2}X$. At per Reg: $\sqrt{5} \pm 1 = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+1.\ \sqrt{b}: \sqrt{5}+1 \\ \sqrt{5}-1.\ \sqrt{r}: \sqrt{5}-1 \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5}+1$: pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-1$, Et dicitur Potens rationale cum mediali.

Exempl: VI. Quæratur latus Binomii VI, $\sqrt{2c}+\sqrt{1}$: nempe $Z+2Æ$. Quare $\frac{1}{2}Z$ est $\sqrt{5}$: & Æ est $\sqrt{2}$: Et $\frac{1}{4}Zq-Æq$ est $5-2$; hoc est 3: cujus latus $\sqrt{3}$ est $\frac{1}{2}X$. At per Regul: $\sqrt{5} \pm \sqrt{3} = \left.\begin{array}{l} \sqrt{5}+3.\ \sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}. \\ \sqrt{5}-3.\ \sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}. \end{array}\right\}$ Latus igitur quæsitum est $\sqrt{b}: \sqrt{5}+\sqrt{3}$: pl $\sqrt{r}: \sqrt{5}-\sqrt{3}$. Et dicitur Potens duo medialia.

12. Atque hîc obiter trianguli rectanguli plani Genesis se offert. Quia $Zq = Xq+4AE$, nempe $Hq = Bq+Cq$, per 47 e 1: Propositis binis quibuscunque lineis sive numeris A & E, trianguli rectanguli latera erunt, $A+E$, $A-E$, $\sqrt{4AE}$: vel etiam (mutatis A & E in Aq & Eq) $Aq+Eq$. $Aq-Eq$. $2AE$, (scil: $\sqrt{4AqEq}$.) Ut si proponantur duo numeri 2 & 1: latera erunt 3, 1, $\sqrt{8}$: nempe $2+1$, $2-1$, $\sqrt{4\times2\times1}$. vel etiam 5, 3, 4: nempe $4+1$, $4-1$, 2×1 bis.

13. Datis binis triangulis, rectangulis, H, B, C: & h, b, c: tertium ex ipsis fabricare: idque duplicetur,

I. Quia $\left.\begin{array}{l} Bq = Hq-Cq \\ \text{Et } bq = hq-cq \end{array}\right\}$ Multiplicentur invicem,

Eritque

Eritque $Bqbq = Hqhq + Cqcq$ mi $Hqcq + Cqhq$.
At $Hqhq + Cqcq + 2Hchc = Q:Hh + Cc$:
Et $Hqcq + Cqhq + 2HChc = Q:Hc + Ch$:
Subducatur unum quadratum ex altero: & erit,
$Bqbq = Q:Hh + Cc$: mi $Q: Hc + Ch$:
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
$Bb. Hh + Cc. Hc + Ch$. Hæc Regula sit I.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi base, sumatur rectangulum sub basibus: Pro hypotenusa, rectangulum sub hypotenusis auctum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub hypotenusa primi & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & hypotenusa secundi.

IIº Quia $\left.\begin{array}{l} Hq = Bq + Cq \\ \text{Et } hq = bq + cq \end{array}\right\}$ Multiplicentur invicem
Eritque $Hqhq = Bqbq + Cqcq$ pl. $Bqcq + Cqbq$.
At $Bqbq + Cqcq - 2BCbc = Q:Bb - Cc$:
Et $Bqcq + Cqbq + 2BCbc = Q:Bc + Cb$:
Addantur hæc duo quadrata: & erit
$Hqhq = Q:Bb - Cc$:pl $Q:Bc + Cb$.
Et sic inventum est ex his triangulum tertium,
$Hh. Bb - Cc. Bc + Cb$. Hæc Regula sit II.

Enunciatur autem verbis sic. Pro trianguli novi hypotenusa, sumatur rectangulum sub hypotenusis. Pro base, rectangulum sub basibus minutum rectangulo sub cathetis. Pro catheto, rectangulum sub base primi, & catheto secundi, auctum rectangulo sub catheto primi & base secundi.

14. Si trianguli rectanguli latera continuè multiplicentur juxta binas regulas modò inventas: Prima multiplicatio triangulum producet bicompositum: secunda

secunda tricompositum: tertia quadricompositum: & sic ulterius.

Exempl. Reg. I. Bb. Hh+Cc. Hc+Ch.

B. H. C. trianguli simpli.
B. H. C.

Bq. Hq+Cq. 2 HC. triang. bicomposit.
B . H . C

Bc. Hc+HCq. 2HqC
2HCq. HqC+Cc.

Bc. Hc+3HCq. 3HqC+Cc. tri composit.
B . H . C

Bqq. Hqq+3HqCq. 3HcC+HCc
Cqq+3HqCq. HcC+3HCc.

Bqq. Hqq+6HqCq+Cqq. 4HcC+4HCc.
B . H . C (quadricomp.
&c.

Exempl. Reg. II. Hh. Bb-Cc. Bc+Cb.

H. B. C. trianguli simpli.
H. B. C.

Hq. Bq-Cq. 2BC: triang. bicomposit.
H . B . C

Hc. Bc-BCq. 2BqC
−2BCq. BqC-Cc

Hc. Bc-3BCq. 3BqC-Cc: tri-composit.
H . B . C

Hqq. Bqq-3BqCq. 3BcC-BCc
Cqq-3BqCq. BcC-3BCc

Hqq. Bqq-6BqCq+Cqq. 4BcC−4BCc.
H . B . C (quadricomp.
&c.

CAP.

Cap. XVII.

Alia tabulæ posterioris in Cap. 12. inspectio. quoad Æquationes.

1. A Binomia radice A+E, potestatum species omnes sunt affirmatæ. A Residuo verò potestatum species omnes sunt alternatim negatæ, ut Q: A-E: est Aq--2AE+Eq. Et C: A-E: est Ac -3AqE+3AEq-Ec. Et QQ: A-E: est Aqq-4AcE+6AqEq-4AEc+Eqq. &c. Adeò ut sit potestatis cujusvis species alternatim sumptæ, in duas summas aggregentur: harum summarum connexio cum signo radicis, erit radicis ipsius potestas. Atque hæc est Binomiorum, ac Residuorum, Quadraticorum, Cubicorum, aliorumque constitutio.

B. Quare nominum Binomii, vel Residui cujusque differentia, est homogenea potestas differentiæ nominum radicis. scil: Ac+3AEq mi 3AqE+Ec vel Ac+3AEq-3AqE-Ec, est C:A-E.

3. Et Quadratorum è nominibus Binomii vel Residui cujusq; differentia, est homogenea potestas differentiæ quadratorum è nominibus radicis. scil: Q: Ac+3AEq:mi Q:3AqE+Ec est C: Aq-Eq.

Nam per exempl: Reg: I,in 14,Cap. XVI,si cogitetur A hypotenusa trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq-Eq quadratum basis; hoc Theorema aliter symbolis explicabitur sic: Q: Hc+3HCq: mi Q: 3HqC+Cc:= C:Bq:= Q:Bc: ergo

4. At si species in nominibus aggregatæ, ipsæ etiam

am alternatim adfirmentur, & negentur: Quadratorum è nominibus ſumma, eſt homogenea poteſtas ſummæ quadratorum è nominibus radicis. Scil: Q: Ac-3AEq.pl Q: 3AqE-Ec: eſt C: Aq+Eq.

Nam per exempl: Reg.II, in 14, Cap.XVI, ſi cogitetur A baſis trianguli rectanguli; & E cathetus; & Aq+Eq quadratum hypotenuſæ; hoc Theorema aliter ſymbolis explicabitur ſic: Q: Bc-3BCq: pl Q: 3BqC-Cc:=c:Hq:=Q:Hc. Ergo

5. Omnes cujuſque ordinis intermediæ ſpecies, ſunt etiam poteſtates mediorum inter A & E proportionalium. ſcil. inter Ac & Ec, ſunt duæ mediæ proportionales, AqE & AEq: qui etiam cubi ſunt ex M & N. Quare A, √cAqE, √cAEq, E, ſunt continuè proportionales: nempe A, M, N, E. Nam AqE=AMN=Mc: & AEq=MNE=Nc. Atque hinc patet inventio quotlibet mediorum proportionalium inter A & E: ut ſi velis quinque medios proportionales, poteſtates erunt 6 ſive cc, quarum Index unitate excedit numerum quæſitorum mediorum: Eruntque A, √cc AqcE, √ccAqqEq, √ccAcEc, √cc Aq Eqq, √ccAEqc, E, ∷

6. Omnis media ſpecies in unoquoque genere, fit ex duabus nominum radicis poteſtatibus, quarum Indices ſimul, æquales ſunt Indici ejuſdem generis: mediæ autem ipſius ſpeciei ab extremis ſuis diſtantiæ, æquales erunt Indicibus alternarum facientium: & facientibus ſuis in communi angulo reſpondent. Scil: AqEc generis quadrato-cubici, fit ex Aq in Ec, quibus in communi angulo reſpondent. Eſtque ab Aqc tertia: & ab Eqc ſecunda.

Conſect,

Consect, Atque hinc facile erit radicis Binomiæ datæ potestatem quamlibet (inventis omnibus mediis inter potestates nominum extremas) construere. Ut in exemplo, si radicis Binomiæ A+√Æ quæratur Quadrato Cubus: erit Aqc+ 10 ÆAc+ 5 ÆqA plus 5 √ÆAqcc+ 10√ÆcAqq+ √Æqc: Quod Binomium est Quadrato-Cubic.

A Aq Ac Aqq Aqc

√Æ Æ √Æc Æq √Æqc

Aqc
5√ÆAqcc
10ÆAc
10√ÆcAqq
5ÆqA
√Æqc

7. Si species aliqua multiplicetur in Æ, producta magnitudo erit media species collateralis, in ordine alternè sequente, atque eadem numero à suis extremis. Ut Ac×Æ, est AqqE, quæ prima est ab Aqc, & quarta ab Eqc. Sic AcE×Æ, est Aqq Eq, quæ ab Acc secunda est, & ab Ecc quarta. Et similiter de reliquis.

8. Si species aliqua multiplicetur per A—E vel X, producta magnitudo erit differentia inter duas species ordinis sequentis utrinque proximas. Ut AcX= Aqq—AcE. AqEX=AcE—AqEq. AEqX=AqEq —AEc. EcX=AEc—Eqq. Quare

Si omnes cujusvis ordinis species multiplicentur per X, producetur differentia duarum potestatum extremarum ordinis proximi superioris. Ut ex Ac+ AqE+AEq+Ec, ductus in X, fiet Aqq-Eqq.

9. In ordinibus Indicum imparium (l,c,qc,&c.) summa duarum extremarum potestatum; at in ordinibus Indicum parium (q, qq, cc, &c.) differentia earundem; fit ex A+E ducta in singulas species ordinis

nis minoris præcedentis, alternatim adfirmatas & negatas. Ut Ac+Ec, fit ex Aq−AE+Eq, ductis in A+E. Item Aqq-Eqq, fit ex Ac-AqE+AEq-Ec, ductis in A+E.

10. Si eadem magnitudo multiplicetur in duas magnitudines contrarias: magnitudines ex ipsis factæ erunt etiam contrariæ. Ut Aq-2AE+Eq ductæ in A-E, fient Ac--3AqE+3AEq--Ec. At vero eædem ductæ in --A+E, fient--Ac+3AqE--3AEq+Ec.

11. Unciæ sive numeri speciebus præfixi, sunt figuræ numerariæ. Nam omnes sub A & E, sunt radices. Omnes sub Aq & Eq, sunt triangulares. Omnes sub Ac & Ec, sunt pyramidales. Omnes sub Aqq & Eqq, sunt triangulo-triangulares. Omnes sub Aqc & Eqc, sunt triangulo-pyramidales. Omnes sub Acc & Ecc, sunt pyramidi-pyramidales, &c.

12. Si radix tribus constet nominibus, A, E, I,

Quadratum { Aq, 2AE, Eq, 2EI, Iq, 2AI, }

Cubus { Ac, Ec, Ic, 3AqE, 3AEq: 3AqI, 3AIq, 3EqI, 3EIq, 6AEI.

Et nota quòd si in aliqua specie, numerus laterum negatorum sit impar; species illa erit negata. Ut Q: A+E-I: = Aq+2AE+Eq-2EI+Iq-2AI. Et C: A+E-I: = Ac+3AqE + 3AEq + Ec-3EqI + 3EIq -Ic-3AqI+3AIq-6AEI.

CAP.

Cap. XVIII.

Penus Analytica.

1. EX primis ac facillimis æquationibus, quæ nihil aliud sunt, quàm vel terminorum expositiones, vel simplices affectiones (quales sunt illæ capitis XI, $\frac{1}{2}Z - E = \frac{1}{2}X$: & $\frac{1}{2}X + E = \frac{1}{2}Z$: & reliquæ ejusmodi) innumeri aliæ deducuntur, per Additionem, Subductionem, Multiplicationem, Divisionem, Transpositionem, atque Interpretationem: sumendo id quod alteri inventum est æquale, loco ejus cui æquatur. Quæ quidem *A*nalytica supellex est, non minùs pretiosa, quàm copiosa. Quarum ergo præcipuas aliquot, & maximè necessarias adscribam: plures *A*nalytices studiosus pro suo exercitio excogitabit. *E*t ubicunque sive in *A*rithmetica, sive in Geometria, sive in alia aliqua arte, inciderit in magnitudinem aliquam, cui alteri æqualis esse intelligitur; æqualitatem illam quibuscunque poterit modis atque comparationibus, torquebit, discutiet, variabit, ut novum inde artis instrumentum inveniat: quod postea in penu servabit: & ubicunqne poterit in usum profert, ad artis subsidium atque augmentum.

2. $Q{:}1{:} = 9Q{:}\tfrac{1}{3}.$ &c. $C{:}1{:} = 27\,C\tfrac{1}{3}{:}$ &c.

$Q{:}1{:} = \tfrac{1}{9}Q{:}3.$ &c. $C{:}1{:} = \tfrac{1}{27}C{:}3{:}$&c.

$Q{:}1{:} = \tfrac{9}{4}Q{:}\tfrac{2}{3}.$&c. $C{:}1{:} = \tfrac{27}{8}C{:}\tfrac{2}{3}{:}$&c.

$\tfrac{2}{5}Q{:}1{:} = \tfrac{2}{5}\times\tfrac{9}{4}Q{:}\tfrac{2}{3}{:}$&c. $\tfrac{2}{5}C{:}1{:} = \tfrac{2}{5}\times\tfrac{27}{8}C{:}\tfrac{2}{3}{:}$&c.

$\tfrac{2}{3}Q{:}4{:} = \dfrac{2\times16}{3}\,Q{:}1.$&c. $\tfrac{2}{3}C{:}4{:} = \dfrac{2\times64}{3}C{:}1{:}$&c.

3. Si linea biſecetur, & ſecùs; rectangulum ſub ſegmentis inæqualibus, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti atque interſegmenti: hoc eſt ſemiſummæ atque ſemidifferentiæ ſegmentorum. 5 e 2. $AE = Q{:}\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}E{:}$mi $Q{:}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}E{:}$ Et hoc eſt, $AE = \tfrac{1}{4}Zq - \tfrac{1}{4}Xq$.

4. Si linea biſecta augeatur; rectangulum ſub tota aucta & augmento, æquatur differentiæ quadratorum biſegmenti aucti, atque biſegmenti. 6 e 2. $A+E$ in $E = Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:}$mi $Q{:}\tfrac{1}{2}A$. Et $A+E$ in $A = Q{:}\tfrac{1}{2}E+A{:}$ mi $Q{:}\tfrac{1}{2}E$.

Datis igitur ſumma trium $\div\!\!:$ $(Aq+AE+Eq)$ cum alterutro extremorum, dantur duo reliqui. Sic

$\sqrt{u}{:}Aq+AE+Eq-\tfrac{3}{4}Aq{:}$mi $\tfrac{1}{2}A = E$.

$\sqrt{u}{:}Aq+AE+Eq-\tfrac{3}{4}Eq{:}$mi $\tfrac{1}{2}E = A$.

Nam $Q{:}\tfrac{1}{2}A+E{:} = \tfrac{1}{4}\,q+AE+Eq$.

Et $Q{:}\tfrac{1}{2}+A{:} = Aq+AE+\tfrac{1}{4}Eq$.

5. Si linea ſecetur utcunque; ſumma quadratorum totius, & unius ſegmenti, æquatur aggregato quadrati alterius ſegmenti, & duplicis rectanguli ſub tota & priore ſegmento, 7 e 2. $Zq+Aq = 2ZA+Eq$. Et $Zq+Eq = 2ZE+Aq$. Quare $2ZA + Aq - Aq = Zq = 2ZE+Aq-Eq$.

6. Si linea utcunque ſecta, augeatur alterutro ſegmento; Quadruplex rectangulum ſub ſecta, & ſegmento

mento augente, æquatur differentiæ quadratorum totius auctæ, & alterius segmenti. 8 e 2.

$Q:Z+E:-Aq = 4ZE$. Et $Q:Z+A:-Eq = 4ZA$.

7. Si linea bisecetur, & secus; summa quadratorum segmentorum inæqualium, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti, & intersegmenti 9 e 2. $Aq+Eq = 2Q:\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E:+2Q:\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$.

8. Si linea bisecta augeatur; summa quadratorum totius auctæ & augmenti, æquatur duplicatæ summæ quadratorum bisegmenti aucti, & bisegmenti. 10 e 2.

$Q:A+E:+Eq = 2Q:\frac{1}{2}A+E:+2Q:\frac{1}{2}A$.

$Q:A+E:+Aq = 2Q:\frac{1}{2}E+A:+2Q:\frac{1}{2}E$.

9. $Aq = ZA - AE = XA + AE = \frac{1}{2}ZA + \frac{1}{2}XA = Q:Z-E: = Q:E+X: = Z-Eq = Eq+X$.
Et $Eq = ZE - AE = AE-XE = \frac{1}{2}ZE - \frac{1}{2}XE = Q:Z-A: = Q:A-X: = Z-Aq = Aq-X$.

10. Æ $= \frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Xq = ZA - Aq = ZE - Eq = Aq-XA = Eq+XE = \frac{1}{2}Zq - \frac{1}{2}Z = \frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}Xq = \frac{1}{2}ZA-\frac{1}{2}XA = \frac{1}{2}ZE+\frac{1}{2}XE$.

11. $Z = Aq + Eq = Zq - 2AE = 2AE + Xq = ZE + XA = ZA-XE = 2Q:\frac{1}{2}Z: + 2Q:\frac{1}{2}Z-E: = Q:A-2N:+Q:2M-E: = \frac{1}{2}Zq+\frac{1}{2}Xq = 2Q:\frac{1}{2}Z:+2Q:\frac{1}{2}X:$ Consectarium ex his duabus ultimis æquationibus: Si magnitudo constet ex quadratis binarum magnitudinum: ejus etiam duplum constabit ex duobus quadratis, summæ scil: & Differentiæ. Et dimidium ejus constabit ex duobus quadratis, semisummæ scil: & Semidifferentiæ.

Et $= Aq - Eq = ZX = 2ZA - Zq = Zq - 2ZE = 2XA - Xq = 2XE + Xq = ZA - ZE = XA + XE = Zq - 2ZE = ZA + XE - 2Æ = XA + 2Æ - ZE = Q{:}A + 2N{:}$ mi $Q{:}2M + E.$

12. $Q{:}\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}E{:} = Q{:}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}E{:} + Æ.$ } Nam $\tfrac{1}{4}Zq$
Et $Q{:}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}E{:} = Q{:}\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}E{:} - Æ.$ } $= \tfrac{1}{4}Xq + Æ.$

13. $2A + 2E$ in $A = 2Aq + 2AE = Zq + X.$
Et $2A - 2E$ in $A = 2Aq - 2AE = X + Xq.$
Et $2A + 2E$ in $E = 2AE + 2Eq = Zq - X.$
Et $2A - 2E$ in $E = 2AE - 2Eq = X - Xq.$

14. $Xq = ZqXq = \mathbf{Z} + 2Æ$ in $\mathbf{Z} - 2Æ = Zq - 4AqEq.$

15. $ZÆ = AqE + AEq.$ Et $XÆ = AqE - AEq.$
Et $\mathbf{Z}Æ = AcE + AEc.$ Et $\mathbf{X}Æ = AcE - AEc.$
Quare $\mathfrak{z} + 3ZÆ = Zc.$ Et $\mathfrak{z} - 3XÆ = Xc.$
Et $\mathbf{Z}Z = \mathfrak{z} + ZÆ = Ac + AqE + AEq + Ec.$
Et $\mathbf{Z}X = \mathfrak{x} - XÆ = Ac - AqE + AEq - Ec.$
Et $\mathbf{X}Z = \mathfrak{x} + XÆ = Ac + AqE - AEq - Ec.$
Et $\mathbf{X}X = \mathfrak{z} - ZÆ = Ac - AqE - AEq + Ec.$
Hinc $\mathbf{Z}Z + \mathbf{X}X = 2\mathbf{Z}.$ Et $\mathbf{X}Z + \mathbf{Z}X = 2\mathfrak{x}.$
Et $\mathbf{Z}Z - \mathbf{X}X = 2\mathbf{Z}Æ.$ Et $\mathbf{X}Z - \mathbf{Z}X = 2\mathbf{X}Æ.$

16. Si in circulo sit $7.22{::}\delta.\pi{::}113.355{:}$ erit

$\delta.\pi{::}2R.P{:}$periph.	Et $\pi.\delta{::}\tfrac{1}{2}P.$ R: semidiam.
$\delta.\pi{::}Rq.$ Circul.	Et $\pi.\delta{::}\tfrac{1}{4}Pq.$ Circul.
$\delta.\pi{::}2Rc.$ Cylind.	Et $\pi q.\delta q{::}\tfrac{1}{4}Pc.$ Cylind.
$\delta.\pi{::}\tfrac{4}{3}Rc.$ Sphær.	Et $\pi q.\delta q{::}\tfrac{1}{6}Pc.$ Sphær.
$\delta.\pi{::}\tfrac{2}{3}Rc.$ Con.	Et $\pi q.\delta q{::}\tfrac{1}{12}Pc.$ Con.

17. Ad hæc oportet futurum Analystam Geometrica ista, tum theoremata, tum problemata non ignonorare.

Theor: 1. Triangula sunt æqualia: Si in utroque, vel tria latera; vel duo latera cum angulo comprehenso

henſo; vel duo latera cum angulo eidem lateri oppoſito, modo angulus reliquo lateri oppoſitus ſit homogeneus; vel duo anguli latere interjacente; vel duo anguli cum latere eidem ſubtenſo; æquentur. 4,8,26,e i.

Theor: 2. Triangula plana ſunt ſimilia: Si vel ſint æquianguli; vel lateribus omnibus proportionalia; vel habeant unum angulum æqualem, & alterum angulum crurum proportionalium, & angulum tertium homogeneum. 4,5,6,7,e 6.

Theor: 3. In omni triangulo, majus latus majorem angulum ſubtendit; & minus minorem; & æquale æqualem. 18,19,e 1.

Theor: 4. Duæ rectæ lineæ ſunt parallelæ: Si recta ipſas ſecans æquales fecerit, vel angulos alternos; vel externum & internum oppoſitum; vel duos internos ex eadem parte duobus rectis. At contra. 27, 28,29,30,e 1. Nam lineæ rectæ parallelæ ſunt inſtar unius lineæ latæ.

Theor: 5. Trianguli tres anguli ſimul, æquantur duobus rectis: At externus angulus duobus internis oppoſitis. 32 e 1.

Theor: 6. Si rectam in circulo inſcriptam, recta è centro biſecet: ad angulos rectos ipſam ſecat. 3 e 3.

Theor: 7. Perpendicularis ſuper finem diametri, circulum tangit. 16,18,19,e 3.

Theor: 8. Angulus ad centrum duplus eſt anguli ad peripheriam. 20 e 3.

Theor: 9. In eodem, vel æqualibus circulis, anguli ſuper æqualibus peripheriis, ſunt æquales. 21 e 3.

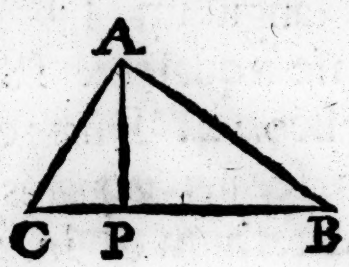
Theor:10. Angulus in semicirculo est rectus 31 e 3.

Theor:11. Si è puncto in peripheria circuli ducantur binæ rectæ lineæ, una circulum tangens, altera secans: anguli inter ipsas comprehensi mensura, æqualis erit semiperipheriæ abscissæ. pro 32 e 3.

Theor: 12. Triangula, sive parallelogramma, æquialta, vel inter easdem parallelas, sunt ut bases. 35,36,37,38, e 1. & 1 e 6.

Theor 13. Recta bisecans angulum trianguli, secat basem ratione crurum 3 e 6.

Theor: 14. Triangulum rectangulum quodvis notetur literis ABC: sic ut A sit angulus rectus: & BA Basis: & CA Cathetus: BC Hypotenusa.



Theor. 15. In triangulo rectangulo plano, perpendicularis ex angulo recto in Hypotenusam, dividit triangulum in duo triangula, tum toti, tū sibi ipsis similia: 8 e 6.

BC. BA. CA :: BA. BP. AP :: CA. AP. CP.
Hypotenusæ Bases Catheti.

Unde sequitur.

1o Perpendicularem esse mediam proportionalem inter segmenta Hypotenusæ. Ideoque Quadratum perpendicularis æquale esse rectangulo sub segmentis. Scil: ∺BP, AP, CP. Et APq=BP*CP.

2o Basem esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Basi conterminum. Scil: ∺BC, BA, BP.

3o Cathetum esse mediam proportionalem inter Hypotenusam, & segmentum Hypotenusæ Catheto con-

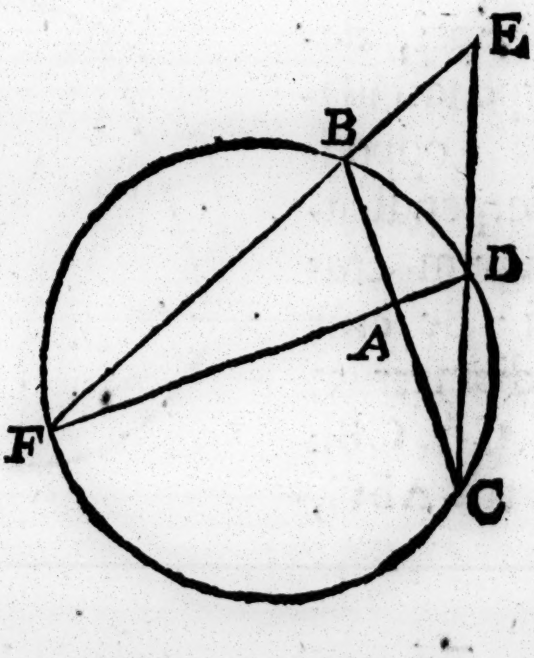
conterminum. Scil: $\div$ BC, CA, CP.

4° Basis & Catheti quadrata, esse ut segmenta Hypotenusæ contermina. BP.CP::BAq.CAq. Nam BP.CP ::BC×BP.BC×CP::BAq. CAq.

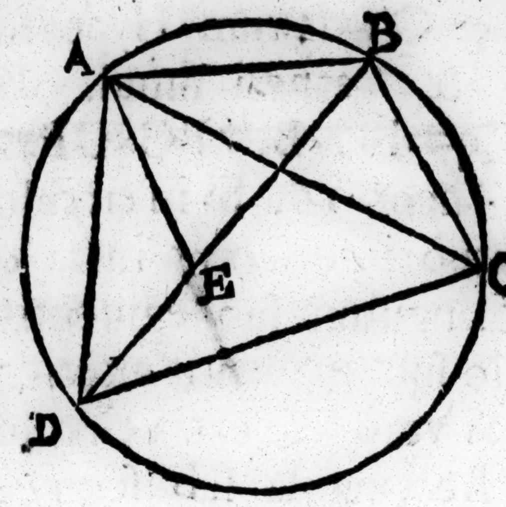
5° Quadratum Hypotenusæ æquari quadratis Basis & Catheti simul. BCq$=$BAq$+$CAq. Nam BCq$=$BC×BP$+$BC×CP$=$BAq$+$CAq.

Theor. 16. Si in circulo duæ rectæ inscriptæ sese mutuò intersecent intra circulum (in puncto A;) rectangulum sub segmentis unius, æquale est rectangulo sub segmentis alterius. 35 e 3.

Si verò sese extra circulum intersecent (in puncto E) Rectangula sub segmentis utriusque à puncto ad convexum & concavum circuli, sunt æqualia. 36 & 37 e 3. Dico primò AB × AC$=$AD×AF. Nam tri: BAF, DAC sim. Dico secundo EB×EF$=$ED×EC. Nam tri:BEC,BEF sim.

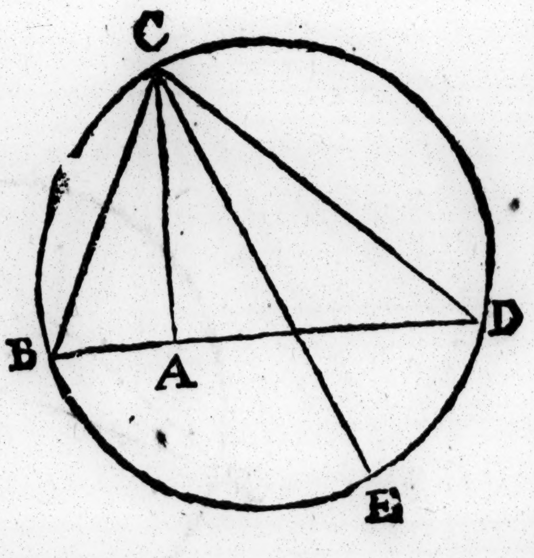


Theo: 17. Quadrilateri in circulo inscripti anguli interiores oppositi simul æquantur duobus rectis, 22 e 3. Et si ducantur duo diagonii, rectangulum sub diagoniis, æquale erit duobus rectangulis sub lateribus oppositis, Dico AC$*$BD $=$AB$\times$CD$+$AD$\times$BC. Nã sumpto ang: DAE $=$CAB; erunt tri: ACB, ADE sim. & ADC, AEB sim.



$$\text{Quare}\begin{cases} AC.\ CB :: AD.DE \\ AC.\ CD :: AB.\ BE \end{cases}\text{ergo,}$$

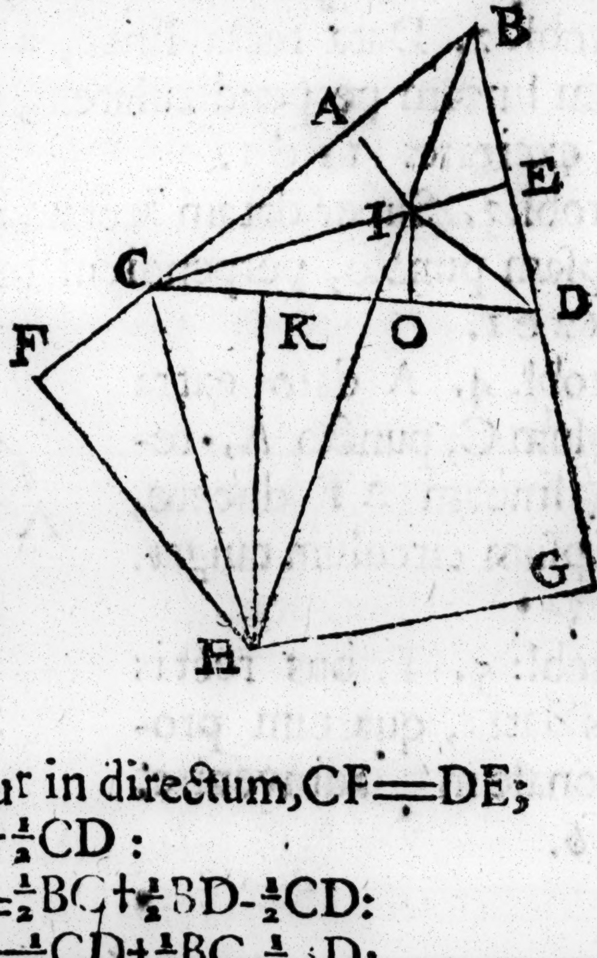
Theor: 18. Si ex angulo quovis trianguli circulo inscripti, demittatur perpendicularis in latus oppositum: Erit ut perpendicularis illa, ad unum crus ejusdem anguli: sic crus alterum, ad diametrum circuli. Dico CA. CB:: CD.CE. Nam tri: ABC, DCE sim.



Theor: 19. Triangula unum angulum æqualem habentia

habentia, rationem habent eam, quæ ex lateribus componitur. 23 e 6.

Theor: 20. Si semisumma trium laterum trianguli plani, & tres differentiæ trium laterum ab illa semisumma, continuè inter se multiplicentur: Vel aliter, si trianguli quovis latere sumpto pro base, & reliquis duobus pro cruribus; Rectangulum sub semisumma & semidifferentia summæ crurum & basis, ducatur in rectangulum sub semisumma & semidifferentia basis & differentiæ crurum: Facti latus quadratum æquale erit areæ trianguli. Esto triangulum BCD, cujus crura sint BC & BD, & basis CD. Bisecentur res anguli rectis BI, CI, DI, concurrentibus in I: unde in latera ad angulos rectos ducantur IA, IE, IO. Sunt igitur intra triangulum BCD, tria paria triangulorum æqualium. Quare si cruri BC adjungantur in directum, CF=DE; erit $BF = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}CD$:



Et $BA = BF - CD = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD - \frac{1}{2}CD$:

Et $AC = BF - BD = \frac{1}{2}CD + \frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}BD$:

Et $CF = BF - BC = \frac{1}{2}CD - \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BD$. Mensuratis BC =BF: erit CK=CF: ducantur perpendiculares FH,, GH,

GH, KH: Et protrahatur BI in H. Quia ang. FCK+FHK=2 Rect=FCK+ACO. Et ang: ACO+AIO=2 Rect: Erunt quadrangula FCKH, AIOC sim. Et tri: CFH, IAC sim. Sunt etiam tri: BAI, BFH sim. His expositis, Dico Quadratum areę trianguli, nempe BFq×IAq=BF×BA×AC×CF.

Nam IA.BA::FH.BF } propter tri: sim.
Et IA.AC::CF.FH }

Quare per multipl: IAq×BF=BA×AC×CF.

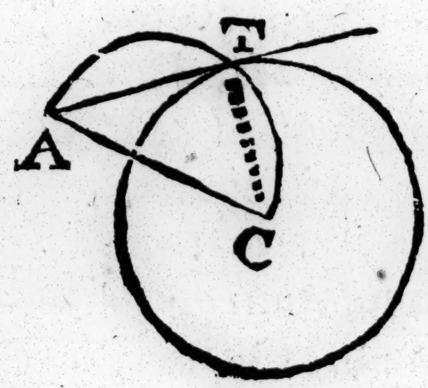
Ducatur utraque pars in BF, eritque &c.

Probl. 1. A dato puncto, vel ad datam distantiam, datæ rectæ lineæ parallelam ducere. 31 e 1.

Probl. 2. Data recta linea, à dato in ea puncto, rectam lineam perpendicularem, sive ad angulos rectos, excitare. 11 e 1.

Probl. 3. Super datam rectam lineam, à datò extra ipsam puncto, perpendicularem rectam demittere. 12 e 1.

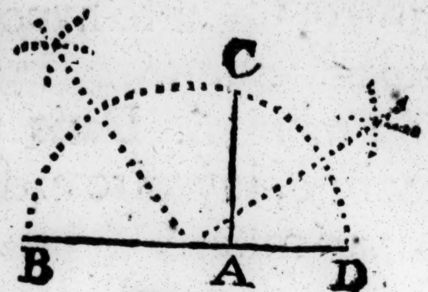
Probl. 4. A dato extra circulum C, puncto A, rectam lineam AT ducere, quæ ipsum circulum tangat. 17 e 3.



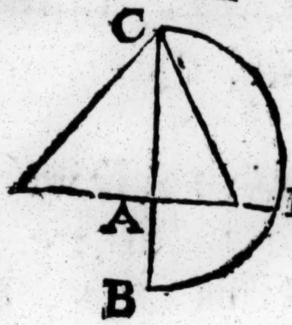
Probl: 5. Tribus rectis lineis datis, quartam proportionalem adinvenire. 12 e 6.

Probl. 6.

Probl: 6. Datis duabus rectis lineis AB, AD, mediam continuè proportionalem AC, adinvenire 13 e 6.

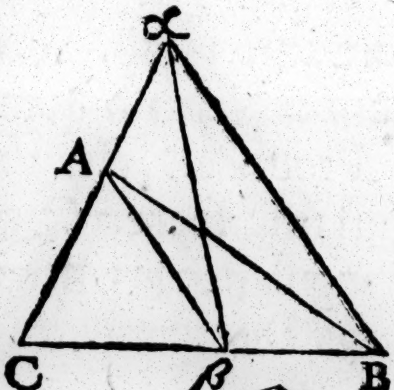


Probl: 7. Datis duabus rectis lineis AB, AC, vel AD, AC, tertiam continuè proportionalem AD, vel AB, adinvenire. 11 e 6.



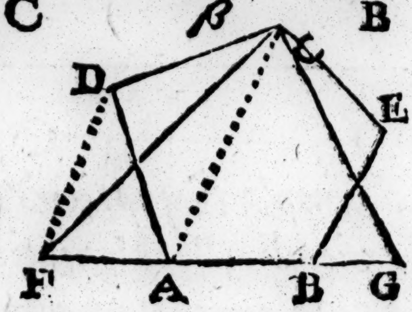
Probl: 8. Dato triangulo, cujus altitudo est AC, & semibasis AB, æquale quadratum ADq, constituere.

Probl: 9. Dato rectangulo aliud rectangulum æquale, ad datum latus, statuere. 14 e 6.



Probl: 10. Triangulo dato aliud triangulum æquale, ad datam altitudinem constituere.

Ex punctis altitudinem A & α, in angulos oppositos linea Aβ & αB, ductæ, sint parallelæ.



Probl : 11. Dato polygono æquale triangulum constituere.

Probl: 12. Datis tribus punctis, non in directum positis, ducere circumferentiam. 25 e 3.

Probl: 13.

Probl: 13. Datis trianguli rectanguli base & Catheto, invenire hypotenusam; vel quadratum quadrato addere.

Probl: 14. Datis trianguli rectanguli hypotenusa & base, invenire cathetum; vel quadratum ex quadrato tollere.

Probl: 15. Binarum figurarum similium rationem invenire. Quæratur tertia proportionalis. Aq. Mq:: A. E.

Probl: 16. Datæ figuræ similem figuram, in data ratione constituere. Quæratur media proportionalis inter latus ipsius, & latus simile. R. √RS :: A. M. Ratio fig: sit R, S.

Probl: 17. In dato circulo hexagonum ordinatum inscribere. 15 e 4.

Probl: 18. In dato circulo Decagonum ordinatum inscribere. Secetur semidiameter circuli secundum extremam & mediam rationem, per 11 e 2.

Probl: 19. In dato circulo Pentagonum ordinatum inscribere. Quæratur Hypotenusa trianguli rectanguli, cujus Basis sit latus Hexagoni, & Cathetus latus Decagoni.

Cap. XIX.

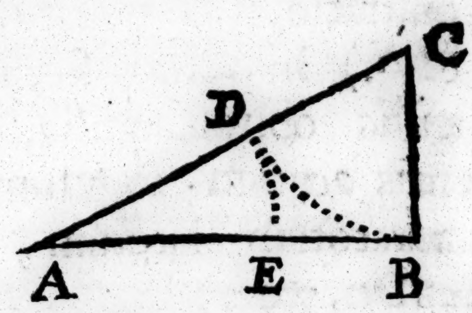
Exempla Æquationis Analyticæ, pro Theorematibus inveniendis, Problematibusq; solvendis. ad quem quasi scopum præcepta hactenus tradita præcipuè collineantur.

Probl: I. INventio 11 e 2. Nempe, Data recta linea B secetur sic ut rectangulum sub tota B, & minore

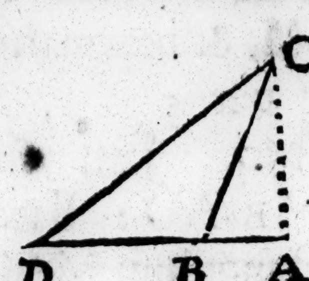
minore ſegmento, æquetur quadrato majoris ſegmenti.

Ponatur majus ſegmentum A: minus erit $B-A$. ducatur $B-A$ in B: fietque $Bq-BA=Aq$: vel $Aq+BA.=Bq$. Quare $\sqrt{u}: Bq+\frac{1}{4}Bq:-\frac{1}{2}B=A$, per 9 cap. 16. Quod Theorema verbis enunciatur ſic: Si quadrato lineæ datæ, addatur quadrati ipſius quadrans: & è latere quadrato ſummæ; tollatur ſemis lineæ datæ: reliquum erit ſegmentum majus.

Geometricè autem conſtruetur, ſic, Fiat $AB=B$: eique ad angulos rectos ſtatuatur $BC=\frac{1}{2}B$: & ducatur Hypotenuſa AC: erit $AC=\sqrt{u}:Bq+\frac{1}{4}Bq$. Abſcindatur $CD=BC$. Eritque reſiduum $AD=\sqrt{u}: Bq+\frac{1}{4}Bq:-\frac{1}{2}B$. Deniq; menſuretur $AE=AD$, pro majore ſegmento.



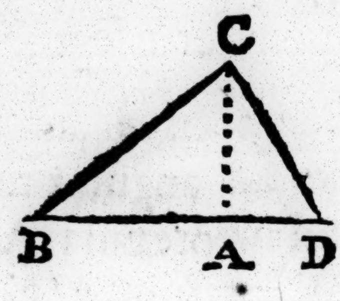
Probl: II. Inventio 12 e 2. Nempe comparatio Baſis obtuſi anguli, cum lateribus. Eſto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, ſit obtuſus: hujus Baſis eſt DC: & latera BD, BC. Hîc $BCq-BAq=CAq=DCq(-DAq$, per 4 e 2$)-BDq-2BD\times BA-BAq$. Quare $BCq+BDq=DCq-2BD\times BA$.



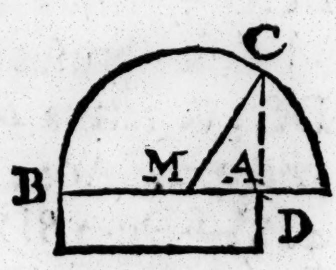
Quod theorema verbis enuntiatur, ſic: In amblygoniis triangulis, quadratum lateris ſubtendentis obtuſum angulum, excedit ſummam quadratorum laterum eundem comprehendentium, duplice rectangulo ſub

sub uno laterum circa obtusum angulum, & segmento ipsius (continuati) inter obtusum angulum & perpendiculum.

Probl: III. Inventio 13 e 2. Nempe comparatio basis acuti anguli, cum lateribus. Esto triangulum BCD: cujus angulus interior ad B, sit acutus. hujus basis est DC: & latera BC, BD. Hîc $BCq - BAq = CAq = DCq$ (-DAq, per 7 e 2) $- BDq + 2BD \times BA - BAq$. Quare $BCq + BDq = DCq + 2BD \times BA$. (Eodem prorsus modo procederet Demonstratio, si D ponatur inter B & A.) In verbis, sic, In triangulis obliquangulis, quadratum lateris subtendentis acutum angulum, minus est quam summa quadratorum laterum, &c. ($2BD \times BA - BAq + DAq = BDq$, 7 e 2)



Probl: IV. Inventio 14 e 2: Nempe quadrati æqualis rectangulo $AB \times AD$. Esto $AB + AD = 2BM$. Quare $AB + AD$ secetur æqualiter in M, & inæqualiter in A. Erit igitur per 5 e 2, $AB \times AD = BMq - AMq$. Jam supponatur $ACq = AB \times AD$: fiatque triangulum rectangulum MAC cujus hypotenusa $CM = BM$ semisummæ laterum; & basis AM semidifferentiæ laterum: Cathetus erit AC latus quadrati quæsiti, per 48 e 1.



Inventio areæ trianguli plani.

Probl: V. Attulit ad me amicus quidam meus, vir doctus,

doctus, Theorema de areâ trianguli plani; atque ut id examinarem, & demonstratione munirem, postulavit. Erat autem Theorema, prout memini (nam multi jam elapsi sunt anni) hâc ferè formâ, licet non in iisdem literis.

In triangulo plano cujus latera sunt A,E,B; $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}BqEq-\frac{1}{16}Eqq\\ \frac{1}{8}EqAq-\frac{1}{16}Aqq\\ \frac{1}{8}AqBq-\frac{1}{16}Bqq\end{array}\right\}$ æquantur quadrato areæ trianguli.

Postquam aliquamdiu mecum cogitassem, occurrit mihi 17, c 13. Theor: 20, quod commodissimum huic nodo solvendo duxi. Nam si trianguli duo crura sint A,E; & basis B: inde liquebit, quod $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B$, in $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E$, in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E$, æquatur quadrato areæ trianguli. Factâ igitur harum quatuor magnitudinum continuâ multiplicatione; prodibit $\frac{1}{8}AqEq+\frac{1}{8}AqBq+\frac{1}{8}EqBq-\frac{1}{16}Aqq-\frac{1}{16}Eqq-\frac{1}{16}Bqq$. Quod est ipsum Theorema propositum.

Atque hinc non solum postulato satisfeci; sed etiam quatuor alia Theoremata effectu faciliora exhibui.

Nam quia $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E+\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$.

Et $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E-\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B$.

Et quia $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$:

Et $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}E=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X$.

Erit $\frac{1}{2}Z+\frac{1}{2}B$ in $\frac{1}{2}Z-\frac{1}{2}B=\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$.

Et $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}X$ in $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}X=\frac{1}{4}Bq-\frac{1}{4}Xq$.

Liquet igitur primò, $\frac{1}{4}Zq-\frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bb-\frac{1}{4}Xq=Q$: areæ trianguli. *I*n verbis sic, Si quadrans differentiæ quadratorum summæ crurum & basis ducatur in quadrantem differentiæ quadratorum basis & differentiæ crurum;

crurum; producta magnitudo æqualis erit quadrato Areæ trianguli.

Deinde quia $\frac{1}{4}Zq - \frac{1}{4}Bq$ in $\frac{1}{4}Bq - \frac{1}{4}Xq = \frac{1}{16}ZqBq + \frac{1}{16}BqXq - \frac{1}{16}Bqq - \frac{1}{16}ZqXq$: Liquet secundo, $Zq + Xq - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $\frac{1}{16}ZqXq = Q$: Areæ trianguli.

Item quia $Zq + Xq = 2Z$, per 11, c. 18: Et $ZqXq = Xq$, per 14, c. 18: Liquet tertiò $2Z - Bq$ in $\frac{1}{16}Bq$ mi $Q{:}\frac{1}{4}X = Q$: Areæ trianguli.

Denique ex his comparatis, erit quartò $\left\{ \frac{2ZBq - Bqq - Xq}{16} \right. = Q$: Areæ tri.

Hæc posteriora Theoremata verbis facilè enuntiantur.

Probl: IV. Problematum circa Progressionem Arithmeticam solutio in viginti Propositionibus. Symbola verborum hæc sint: α primus terminus minimus. ω ultimus maximus. T numerus terminorum. X differentia communis. Z summa omnium terminorum. Est igitur $T - 1$ numerus differentiarum: ideoque $TX - X = \omega - \alpha$, summa differentiarum.

Datis tribus ex quinque illis α, ω, T, X, Z, invenire duo reliqua per viginti propositiones sequentes (tot enim sunt varietates) hoc ordine.

Datis	Quæruntur	Per Propositi:
α, ω, T	Z & X	1 & 2
α, ω, X	T & Z	3 & 4
α, ω, Z	T & X	5 & 6
α, T, X	ω & Z	7 & 8
α, T, Z	ω & X	9 & 10

Datis

Datis	Quæruntur	Per Propositiones:
α, X, Z	ω & T	11 & 12
ω, T, X	α & Z	13 & 14
ω, T, Z	α & X	15 & 16
ω, X, Z	α & T	17 & 18
T, A, Z	α & ω	19 & 20

Prop: I. $T\omega + T\alpha = 2Z$.

II. $\frac{\omega - \alpha}{T-1} = X$.

III. $\frac{\omega - \alpha}{X} + 1 = T$. per 2.

IV: $\frac{\omega q - \alpha q}{X} + \omega + \alpha = 2Z$. per 1. 3.

V. $\frac{2Z}{\omega + \alpha} = T$. per 1.

VI. $\frac{\omega q - \alpha q}{2Z - \omega - \alpha} = X$. per 4.

VII. $TX - X + \alpha = \omega$. per 2.

VIII. $TX - X + 2\alpha$ in $T = 2Z$. per 1 & 7.

IX. $\frac{2Z - T\alpha}{T} =$. per 1.

X. $\frac{2Z - 2T\alpha}{Tq - T} = X$. per 2, 8.

XI.

XI. $\sqrt{u}: \alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX : - \frac{1}{2}X = \omega$. per 4.

XII. $\sqrt{u}: \frac{\alpha q - \alpha X + \frac{1}{4}Xq + 2ZX}{Xq} : - \alpha + \frac{1}{2}X = T$. per 8.

XIII. $\omega + X - TX = \alpha$. per 7.

XIV. $2\omega + X - TX$ in $T = 2Z$. per 1 & 13.

XV. $\frac{2Z}{T} - \omega = \alpha$. per 9.

XVI. $\frac{2T\omega - 2Z}{Tq - T} = X$. per 14.

XVII. $\frac{1}{2}X \pm \sqrt{u}: \omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - 2ZX : = \alpha$. per 4.

prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XVIII. $\frac{\omega + \frac{1}{2}X}{X} \mp \sqrt{u}: \frac{\omega q + \omega X + \frac{1}{4}Xq - ZX2}{Xq} := T$. per 14.

prout α contigerit $\left\{\begin{matrix}\text{major}\\ \text{minor}\end{matrix}\right\}$ esse quam $\frac{1}{2}X$.

XIX. $\frac{2Z}{2T} - \frac{TX}{2} + \frac{X}{2} = \alpha$. per 10.

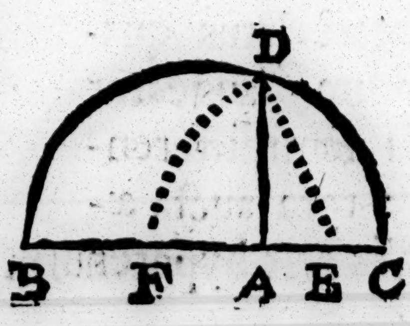
XX. $\frac{2Z}{2T} + \frac{TX}{2} - \frac{X}{2} = \omega$. per 16.

Probl. VII. Euclides 11 e 2, docuit secare lineam datam, sic, ut rectangulum sub tota & minore segmento, æquetur quadrato majoris segmenti: quæ sectio est penè divina. Proponatur jam illud problema generaliter; Data linea AB ita secetur, ut rectangulum sub tota AB, & minore segmento, ad quadratum majoris segmenti, rationem quamcunque possibilem datam habeat: puta R ad S.

Primo fiat R.S::AB.AC: qui quartus sit proportionalis: tum pro majore segmento ponatur A: minus segmentum erit AB-A: quod ductum in AB, dabit rectangulum ABq-AB×A. Erit igitur AB. AC:: ABq —AB×A. Aq. Ideoque per 3 cap. 6, ABq×AC-AB ×AC×A=AB×Aq. Et divisis omnibus per AB, erit AB×AC—AC×A=Aq: vel Aq+AC×A=AB×AC. Et per 9 cap. 16, invenitur √u:¼ACq+AB×AC:-½AC =A.

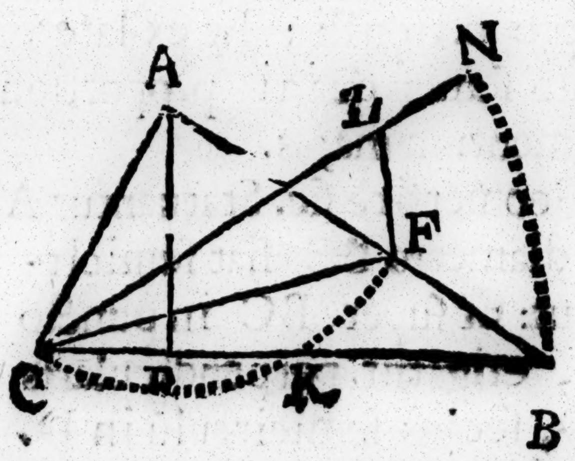
Hoc theorema inventum, verbis sic enunciatur: Si ad quadratum semissis quarti proportionalis, adjungatur rectangulum sub linea recta data, & quarto illo proportionali; Et ex latere quadrato summæ tollatur semis quarti proportionalis: Reliquum erit segmentum majus.

Geometricè sic. Statuantur AB & AC in directum: Et diametro BC fiat semicirculus: Et super BC in puncto A, erigatur perpendicularis AD, secans semicirculũ in D. tum bisecta AC in E, mensuretur EF=ED. Dico lineam AB sic secari in puncto F



ut ſit R.S :: AB×BF. AFq. Nam AC×AF+AC×BF =AC×AB=ADq=CF×AF, per 6 e 2,=AC×AF+AFq. Quare AC×BF=AFq. Atqui AB. AC :: AB×BF. AC×BF. Ergo,

Probl. VIII. Dato latere alterutro trianguli rectanguli (in quo perpendicularis ex angulo recto ſecat hypotenuſam) una cum BK differentia ſegmentorum hypotenuſæ, invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum. Primò detur latus minus CA. Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC: in quo è vertice in hypotenuſam demittatur perpendicularis AP, ſecans hypotenuſam in BP & CP ſegmenta. Eſt autem $CP = \frac{BC-BK.}{2}$ Quia eſt BC. CA :: CA. $\frac{BC-BK}{2}$ erit $\frac{BCq-BC\times BK}{2} = CAq$: vel BCq − BK×BC=2CAq. quare per 9 c 16, √q: ¼BKq + 2CAq : + ½BK=BC. Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadratum ſemidifferentiæ ſegmentorum hypotenuſæ addatur duobus quadratis lateris dati; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa ſemidifferentia: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.



Geometricè

Geometricè sic. Sumpta $AF = AC$; Ducatur CF: ipsique perpendicularis $FL = \frac{BK}{2}$ & extendatur CL ad N, ut $LN = \frac{1}{2}BK$. *Erit* $CN = BC$. quare inscribatur circulo $CK = CN\text{-}BK$: & producatur, &c. Nam $CFq = 2CAq$. & $CLq = 2CAq + \frac{1}{4}BKq$. *Ergo*,

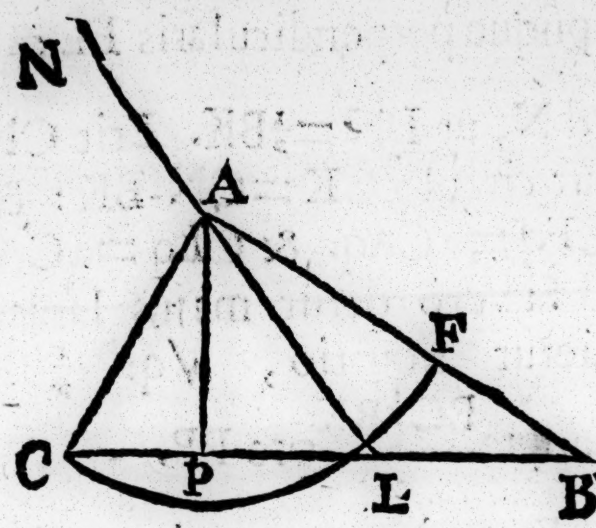
Si verò detur majus latus BA: hujusmodi invenietur æquatio, $\sqrt{q}$: $\frac{1}{4}BKq + 2BAq : - \frac{1}{2}BK = BC$. sumpta $\frac{BC+BK}{2}$ pro PB.

Et modus geometricus priori non absimilis.

Probl: IX. Datis differentia laterum trianguli rectanguli BF, & perpendiculari AP ab angulo recto in hypotenusam: invenire tum hypotenusam, tum triangulum ipsum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Qnoniam per 7 e 2. $2BA \times AF + BFq = BAq + AFq$; Ideoque $BFq = (ABq + AFq$, hoc est) $BCq\text{-}(BA \times 2CA$. hoc est) $BC \times 2AP$, quia $BC . CA :: BA . AP$. *Erit* $BCq - 2AP \times BC = BFq$. quare per 9 c 16. $\sqrt{q}$: $APq + BFq : + AP = BC$.

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic: Si quadrato perpendicularis addatur quadratum differentiæ laterum; & aggregati latus quadratum augeatur ipſa perpendiculari: tota aucta æqualis erit hypotenuſæ.

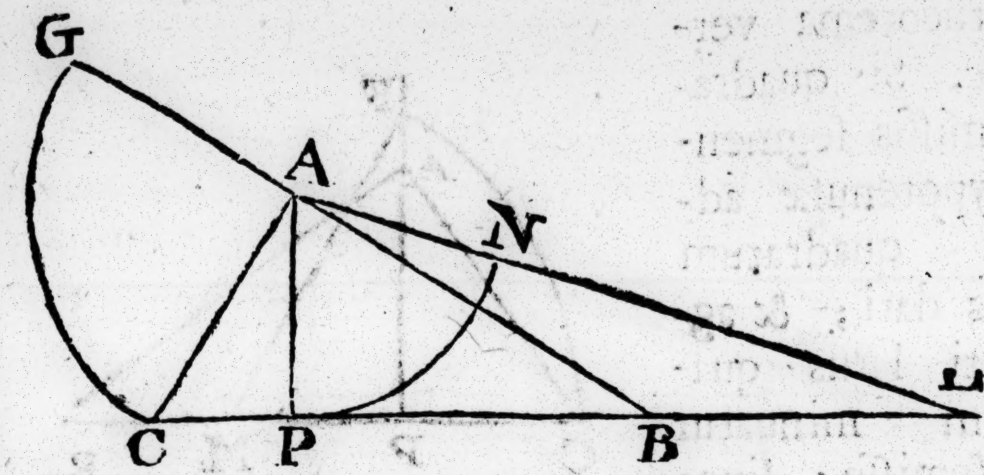


Geometricè ſic. Fiat PL = BF. Et extendatur LA ad N, ut AN = AP. Erit LN = BC. Diametro igitur BC deſcribatur ſemicirculus; in quo ſtatuatur perpendicularis æqualis datæ AP. Et ducantur BA, & CA.

Probl: X. Datis ſumma laterum trianguli rectanguli, BG, & perpendiculari ab angulo recto in hypotenuſam, AP: invenire tum hypotenuſam, tum triangulum ipſum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam per 4 e 2, BGq = (BAq + GAq, hoc eſt) BCq + (2BA×CA, hoc eſt) 2AP×BC, quia BC. CA :: BA. AP. Erit BCq + 2AP×BC = BGq. quare per 9 c 16, √q: APq + BGq:- AP = BC.

Enunciatur



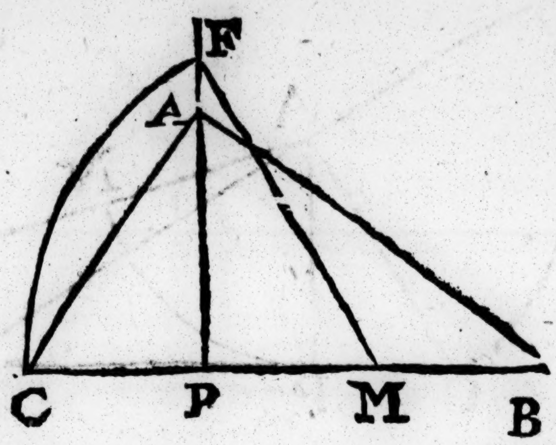
Enunciatur autem hoc theorema sic. Si quadrato perpendicularis addatur quadratum summæ laterum ; & aggregati latus quadratum minuatur ipsa perpendiculari : linea reliqua æqualis erit hypotenusæ.

Geometricè sic. Fiat PL = BG & ducatur AL : ex qua abscindatur AN = AP. Erit LN = BC. Diametro igitur BC describatur semicirculus, &c.

Probl: XI. Datis trianguli rectanguli latere alterutro, CA, & alterno segmento hypotenusæ BP : invenire tum alterum segmentum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur : sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BP + CP. CA :: CA. CP. Erit BP $\times$ CP + CPq = CAq. quare per 9 c 16, $\sqrt{}$q: $\frac{1}{4}$BPq + CAq: $-\frac{1}{2}$ BP = CP.

Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. Si quadrato ſemiſſis ſegmenti hypotenuſæ addatur quadratum lateris dati; & aggregati latus quadratum minuatur ipſo ſemiſſe: linea reliqua erit alterum hypotenuſæ ſegmentum.



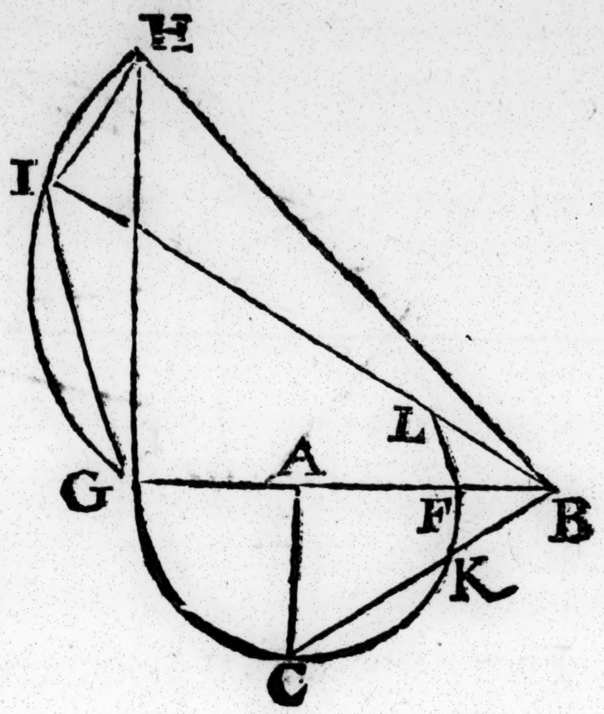
Geometricè ſic. Statuantur ad angulos rectos BP & PF = CA & biſecta BP in M, ducatur MF: cui menſuretur æqualis MC. Inventum eſt igitur CP alterum ſegmentum: & BC tota hypotenuſa. Diametro BC deſcribatur ſemicirculus: in quo inſcribantur CA, & BA.

Probl: XII. Datis trianguli rectanguli differentia ſegmentorum hypotenuſæ BK, & ſumma laterum, BG: invenire tum differentiam laterum, tum hypotenuſam, tum ipſum triangulum.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: ſitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam eſt BG. BK :: BC. BF: eſt etiam BGq. BKq :: (BCq, hoc eſt) BAq + CAq. BFq. Item 2BGq - BKq. BKq :: (2BAq + 2CAq — BFq hoc eſt) BGq. BFq: Nam per 8 c 18 2BAq + 2CAq = BGq + BFq. quare √q: 2BGq — BKq. BG :: BK. BF :: BG. BC.

Enunciatur autem hoc Theorema verbis ſic. Si

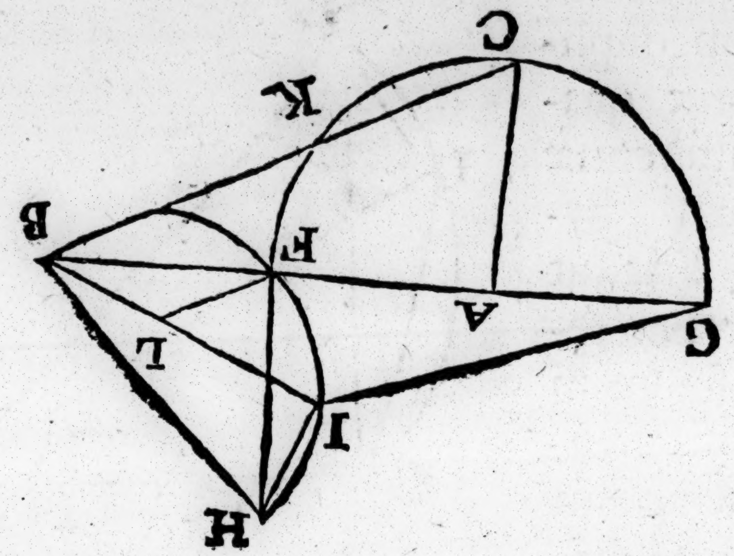
Si è quadrato summæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ: Erit, ut latus quadratum reliqui, ad summam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad differentiam laterum, & sic summa laterũ ad hypotenusam.



Geometricè sic. Statuantur ad angulos rectos BG & GH = BG. tum diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = BK: & ducatur BI. Est igitur BI = √q: 2BGq — BKq. fiat etiam BL = BK. Ducatur GI: eique parallela LF. Ergo inventa est BF differentia laterum.

Probl. XIII. Datis trianguli rectanguli differentia segmentorum hypotenusæ BK, & differentia laterum BF: invenire tum summam laterum, tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam est BF. K :: BC. BG: est etiam BFq. BKq :: (BCq, hoc est) BAq +CAq. BGq. Item 2BFq — BKq. BKq :: (2BAq +2CAq — BGq, hoc est) BFq. BGq: Nam per 8 c 18 2BAq+2CAq = BGq+BFq. Quare √q: 2BFq — B q. BF :: BK. BG :: BF. BC.

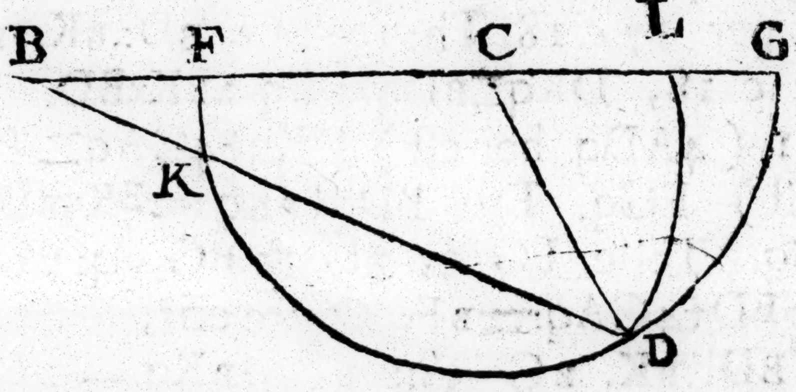


Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. Si è quadrato differentiæ laterum duplicato tollatur quadratum differentiæ segmentorum hypotenusæ. Erit, ut latus quadratum reliqui, ad differentiam laterum; sic differentia segmentorum hypotenusæ, ad summam laterum: & sic differentia laterum, ad hypotenusam.

Geometriè sic. Statuantur ad angulos rectos BF & FH = BF. tum diametro BH describatur semicirculus, in quo inscribatur BI = BK: & ducatur HI. Est igitur HI = $\sqrt{}$q: 2BFq − BKq. fiat BL = HI. Ducatur FL: eique parallela IG. Ergo inventa est BG summa laterum.

Probl. XIV. Datis trianguli plani cujuscunq; differentia laterum FB, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulnm. Et primò sit excessus penes basem. Puta factum esse quod postulatur: sitq; triangulum BCD. Quo-

Quoniam eſt FB. BK::BD. $\frac{BK \times D}{BF} = BG$, per 17 c 18, Th: 16. Erit $\frac{BK \times BD - BFq}{BF} = FG$: & $\frac{BK \times BD - BF}{2FB} = CF$. adde BF, & $\frac{BK \times BD + BFq}{2BF} = BC$. tolle hanc ex BD, & $\frac{2BF \times BD - BK \times BD - BFq}{2BF} = \frac{2BF \times CL}{2BF}$: Quare $2BF \times BD - BK \times BD = 2BF \times CL + BFq$. & per 3 c 6. $2BF - BK.\ 2CL + BF :: BF.\ BD :: BK.\ BG$.



Enunciatur autem hoc theorema verbis ſic. ut differentia inter differentiam laterum duplicatam, & differentia ſegmentorum baſis, eſt ad aggregatum differentiæ inter majus latus & baſim duplicatæ & differentiæ laterum; ſic differentia laterum, ad baſem: & ſic differentia ſegmentorum baſis, ad ſummam laterum.

Geometrica praxis facilior eſt, quàm ut neceſſe ſit apponi.

Si verò exceſſus fuerit penes majus latus: theorema erit, $BK - 2BF.\ 2CL - BF :: BF.\ BD :: BK.\ BG$.

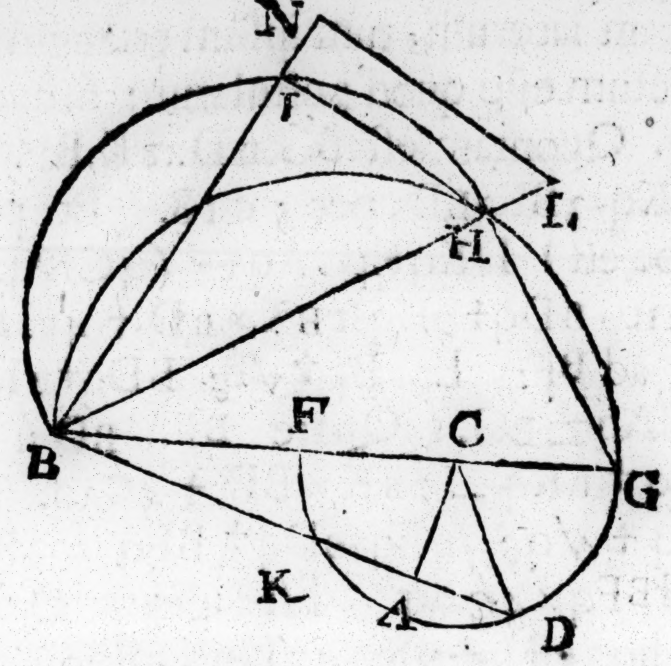
Si

Hujus theorematis investigationem; & problematis quo è datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & differentia inter majus latus & basem CL. postulatur invenire tum basem, tum differentiam laterum, solutionem, omitto; ut habeant studiosi analyseos, quo solertiam suam exerceant.

Probl. XV. Datis trianguli plani cujuscunq; summa laterum BG, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum differentiam laterum, tum ipsum triangulum. Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam per 17 c 18 Th: 16. $BG.\ BD :: BK.\ BF$. Et per 5 c 18, $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$. Et per 47 e 1 ($4ADq$ hoc est) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Tolle FG ex BG: & $BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq: = BF$. Quare erit,

$BG.\ BD :: BK.\ BG - \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Et per 3 c 6, $BK \times BD = BGq - \sqrt{q}: BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq$. Est igitur per 8 c 16, $Q: BGq - BK \times BD$, hoc est, $BGqq - BGq \times 2BK \times BD + BKq \times BDq = BGq \times BDq + BGq \times BKq - BGq \times 2BK \times BD + BGq \times 4CAq$. Ideóque $BGq \times BDq - BKq \times BDq = BGqq - BGq \times BKq - BGq \times 4CAq$. vel etiam, $BGq - BKq$ in $BDq = BGq - BLq - 4CAq$ in BGq. Ergo $Kq: BGq - BKq.\ \sqrt{q}: BGq - BKq - 4CAq :: BG.\ BD :: BK.\ BF$.

Enuncia-



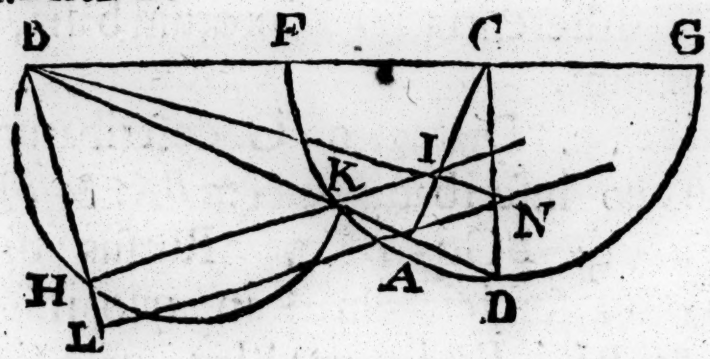
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic, Ut latus quadratum differentiæ inter quadrata summæ laterum, & differentiæ segmentorum basis, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ multatæ quadrato perpendiculi duplicati; sic summa laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad differentiam laterum.

Geometricè sic. Diametro *B*G describatur semicirculus: in quo inscribatur GH = *B*K: & *B*H. Est igitur BH = √q: *B*Gq − *B*Kq. Rursus diametro BH describatur semicirculus: in quo inscribatur HI = 2CA: & BI. Est igitur *B*I = √q: BGq-BKq −4CAq. Fiat *B*L = BG: & ab L ducatur LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est BN = BD.

Probl. XVI. Datis trianguli plani cujuscunque differentia

differentia laterum BF, differentia segmentorum basis BK, & perpendiculari CA: invenire tum basem, tum summam laterum, tum ipsum triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum BCD. Quoniam est $BG.BD::BK.BF$. Et $DKq = BDq + BKq - 2BK \times BD$, per 5 c 18. Et per 47 e 1, ($4ADq$, hoc est) $DKq + 4CAq =$ ($4CDq$, hoc est) FGq. Erit $BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = FGq$. Adde FG ad BF: Et $BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq = BG$. Quare $BF.BD::BK.BF + \sqrt{q}: BDq + BKq - 2BK \times BD + 4CAq$. Item $BK \times BD = BFq + \sqrt{q}: BFq \times BDq + BFq \times BKq - BFq \times 2BK \times BD + BFq \times 4CAq$. Est igitur $Q: BK \times BD - BFq$, hoc est, $BKq \times BDq - BFq \times 2BK \times BD + BFqq = BFq \times BDq + BFq \times BKq - \overline{BFq \times 2BK \times BD} + BFq \times 4CAq$. Ideoque $BKq \times BDq - BFq \times BDq = BFq \times BKq - BFqq + BFq \times 4CAq$. vel etiam $BKq - BFq$ in $BDq = BKq - BFq + 4CAq$ in BFq. Ergo $\sqrt{q}: BKq - BFq. \sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq:: BF.BD::BK.BG$.



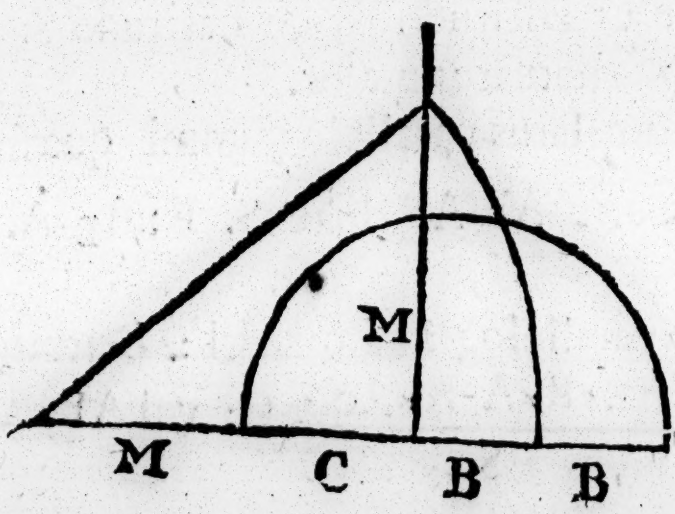
Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. ut latus quadratum differentiæ inter quadrata differentiæ segmentorum basis, & differentię laterum, est ad latus quadratum ejusdem differentiæ auctæ quadrato

to perpendiculi duplicati; sic differentia laterum, ad basem: & sic differentia segmentorum basis, ad summam laterum.

Geometricè sic. Diametro BK describatur circulus: in quo inscribatur KH=BF: & BH. Est igitur $BH = \sqrt{q}: BKq - BFq$. Fiat $BHL = BF$: & $HKI = 2CA$. Ducatur BI. Est igitur $BI = \sqrt{q}: BKq - BFq + 4CAq$. Ducatur etiam LN parallela ipsi HI, concurrens cum BI producta in N. Ergo inventa est $BN = BD$.

Probl: XVII. Datis in triangulo rectangulo differentia inter basem & hypotenusam *B*, & differentia inter cathetum & hypotenusam C: invenire tum hypotenusam, tum ipsum triangulum.

Pro hypotenusa ponatur A. Basis erit $A - B$. & Cathetus $A - C$. & per 47 e 1, Cathetus est $\sqrt{q}: 2BA - Bq$. Quare $\sqrt{q}: 2BA - Bq = A - C$. Et $2BA - Bq = Aq - 2CA + Cq$. vel $2B + 2A$ in A mi $Aq = Bq + Cq$. Ergo per 9 c 16, $B + C + \sqrt{q}: 2BC = A$, hypotenusæ.



Enunci-

Enunciatur autem hoc theorema verbis sic. *Aggregatum* utriusque differentiæ (tum basis tum cathethi) ab hypotenusa; una cum √q duplicis rectanguli sub ipsis differentiis, æquatur hypotenusæ.

Geometricè sic. Ducatur linea infinita in qua mensurentur B, B, & C. hac diametro fiat semicirculus. *Et* in communi B & C termino statuatur ad angulos rectos linea M. Est igitur Mq=2BC. mensuretur etiam M in linea infinita post C. Et semidiametro M+C+B describatur arcus donec concurrat cum linea M perpendiculari producta. tum à puncto concursus ad centrum illius arcus ducatur linea pro hypotenusa. Et descriptum erit triangulum rectangulum quæsitum.

Probl. XVIII. Ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum adplicare, deficiens figura parallelogramma, quæ similis alteri parallelogrammo D dato. Oportet autem datum rectilineum non majus esse eo, quod ad dimidium applicatur. Prop: est 28 e 6,

In parallelogrammo D, notetur lineis perpendicularibus ejus *Al*titudo R, & Latitudo S: nec refert utra ex ipsis statuatur major.

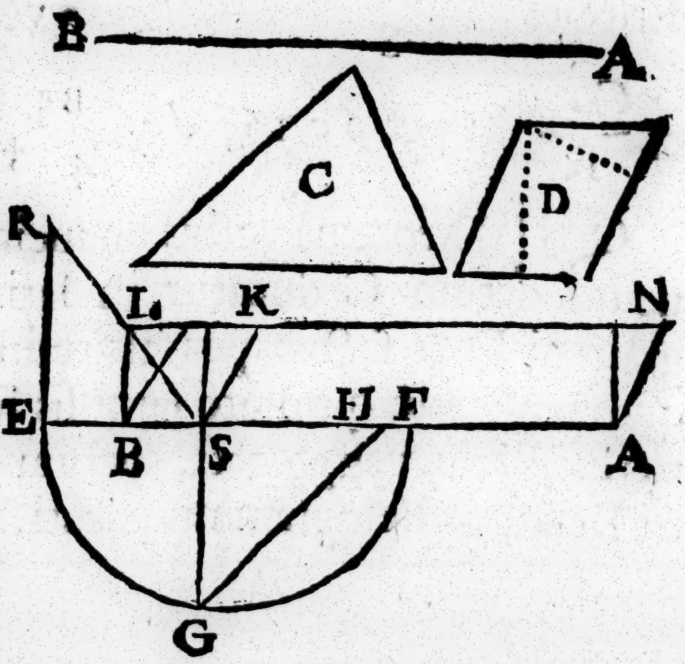
Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: portio ablatitia erit AB-A. Fiat S. R::AB-A. $\frac{AB*R-R*A}{S}$ altitudo parallelogrãmi quæsiti: Ducatur in A latus: eritque $\frac{AB*R*A-R*Aq}{S}$= C: vel AB*A-Aq= $\frac{C*S}{R}$.

ET

Et per 9, Cap. 16, $\frac{AB}{2} + \sqrt{q}\ \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R} = A$.

Qnod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum C datum ducatur in latitudinem parallelogrammi D; & factus dividatur per altitudinem: & quotus ex quadrato semissis lineæ AB datæ auferatur: latus quadratum reliqui auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.

Geometricè sic: Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tum R.S::ER. ES Statuantur ER & ES ad angulos rectos: Sumptaque SF = ER, diametro EF describatur semicirculus: in quo erectâ perpendiculari SG erit $SGq = \frac{C \times S}{R}$



Ex G puncto mensuretur $GH = \frac{1}{2}AB = HB$: erit $HS = \sqrt{:}\ \frac{ABq}{4} - \frac{C \times S}{R}$. cui si adjungas $HA = \frac{1}{2}AB$; erit AS latus parallelogrammi quæsiti. Et $BS = A_B - A$ portioni ablatitiæ. Et BL parallela lineæ ER, erit altitudo. Ergo parallelogrammum quæsitum est ASKN, factum ipsi D æquiangulum.

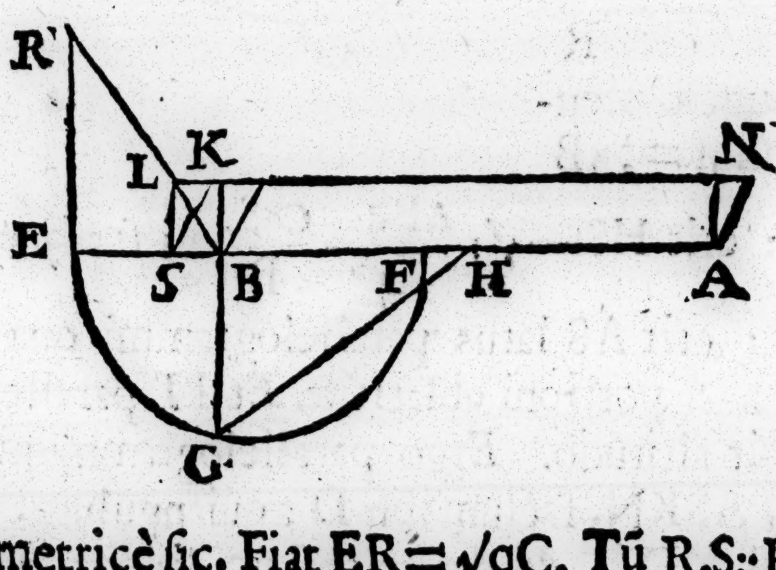
Probl. XIX. *Ad datam rectam lineam AB, dato* rectilineo

rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figuro parallelogramma, quæ similis sit alteri parallelogrammo D dato, Prop: est 29 e 6.

In parallelogrammo D notetur Altitudo & Latitudo, sicut in præcedente.

Ponatur latus parallelogrammi quæsiti A: Portio adjectitia erit $A - AB$. Fiat $S.R :: A - AB . \frac{R * A - AB * R}{S}$ altitudo parallelogrammi quæsiti. Ducatur in A latus. Eritque $\frac{R * Aq - AB * R * A}{S} = C$. vel $Aq - AB \times A = \frac{C * S}{R}$. Et per 9 c 16, $\sqrt{q}: \frac{ABq}{4} + \frac{C * S}{R} + \frac{AB}{2} = A$.

Quod Theorema verbis enunciatur sic. Si rectilineum datum C ducatur in latitudinem parallelogrammi D & factus per altitudinem dividatur: & quotus addatur quadrato semissis lineæ AB datæ: Latus quadratum aggregati, auctum eodem semisse, erit latus parallelogrammi quæsiti.



Geometricè sic. Fiat $ER = \sqrt{q}C$. Tū $R.S :: ER.EB$.

Statu-

Statuantur ER & EB ad angulos rectos: Sumptaque $BF = ER$, diametro EF describatur semicirculus: in quo erecta perpendiculari BG, erit $BGq = \frac{C \times S}{R}$. Esto $BH = \frac{1}{2}AB = AH$. Et ducatur GH $= \sqrt{q:\frac{ABq}{4} + \frac{C \times S}{R}:} = HS$: Est igitur $AS = A$ lateri parallelogrammi quæsiti: Et $BS = A - AB$ portioni adjectitiæ. Et altitudo erit SL parallela lineæ ER. Ergo parallelogrammum quæsitum est, ASKN factum ipsi D æquiangulum.

Probl. XX. Datis trianguli plani cujuscunq; duobus lateribus BC, BD, cum angulo B intercepto: invenire tertium latus, vel datis tribus lateribus: invenire angulum B, uni ipsorum oppositum.

Esto factum quod postulatur: sitque triangulum BCD. Centro B, semidiametro BC, describatur arcus CK: & perpendicularis CA. Est igitur KD differentia laterum: & AK similis sinui verso anguli B. Nam Rad. svB::BK. AK. Estque $AK = \frac{BK \times svB}{Rad}$. Est autem etiam $AK = BK \mp BA$: ut ex schematibus comparatis liquet.

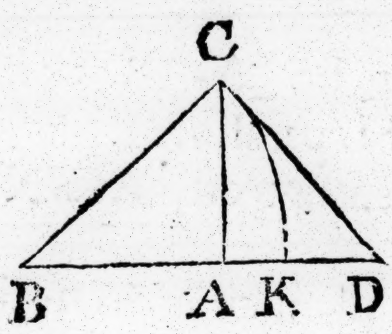
Et quia $BDq + BKq =$ tum

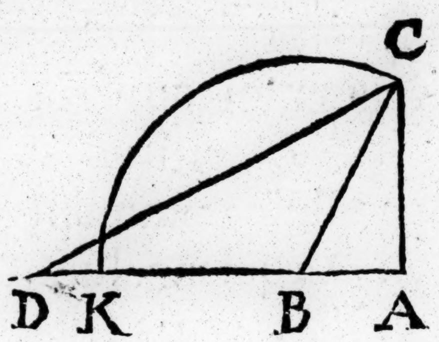
$$\left\{ \begin{array}{l} 2BD \times BK + KDq. \text{ per } 5\,c\,18 \\ CDq \pm 2BD \times BA. \text{ per } 2,\,3,\,c\,19. \end{array} \right\}$$

Erit $2BD \times BK + KDq = CDq \pm 2BD \times BA$. Quare $2BD \times BK \mp 2BD \times BA$. hoc est, $2BD \times AK + KDq = CDq$. at verò $2\,BD \times AK = \frac{2BD \times BC \times svB}{Rad.}$

 Ergo

Ergo $\frac{2BD \times BC \times sv B}{Rad:} + KDq = CDq$. Quod est theorema primum. *Et* $\frac{CDq - KDq \text{ in } Rad:}{2BD \times BC} = sv\, B$. Quod est theorema secundum.





Enunciatur quidem verbis primum theorema sic: Si duplicatum rectangulum sub lateribus datis ducatur in sinum versum anguli intercepti: & factus dividatur per Radium: Quotus auctus quadrato differentiæ laterum æqualis erit quadrato tertii lateris.

Secundum verò sic: Si differentia quadratorum lateris oppositi, & differentiæ laterum, ducatur in Radium; & factus dividatur per duplicatum rectangulum sub lateribus continentibus: quotus æqualis erit sinui verso anguli quæsiti.

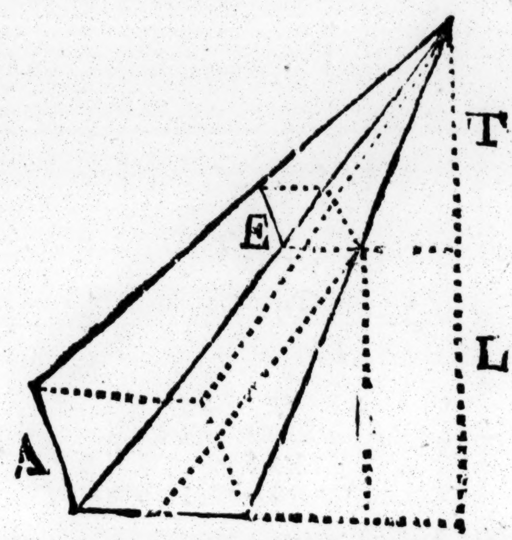
Probl. XXI. Datis frusti pyramidis utraque base Aq, Eq, & altitudine L: invenire mensuram frusti.

Prænoscendum est ex 7 & 10 e 12. quod parallelepipedon æquatur tribus pyramidis: Et Cylindrus æquatur tribus conis, ejusdē basis & altitudinis.

Estque altitudo pyramidis abscissæ (T) primò quærenda

renda, ſic, A−E.E::L.T. Quare $\frac{LE}{X}$ = T. Et altitudo totius pyramidis eſt L+T. Item pyramis tota tripla eſt AqL+AqT. Et pyramis abſciſſa tripla eſt Eq T. Ergo triplum fruſtrum pyramidis eſt AqL +AqT-EqT.

Hoc theorema oſtendit unum modum commenſurandi fruſtum pyramidis: Enunciatur autem verbis ſic.



Si ſolidum ſub baſe majore & tota altitudine multetur ſolido ſub baſe minore & altitudine pyramidis abſciſſæ: reliqui triens æqualis erit fruſto.

Rurſus quia 2 c 11. Aq - Eq = ZX: & T = $\frac{LE}{X}$ Erit AqL+ (ZEL, hoc eſt per 3 e 2) AEL +EqL=AqL+AqT-EqT. Ergo triplex fruſtum pyramidis eſt etiam Aq+Eq+AE in L. hoc theorema docet alterum modum commenſurandi fruſti: enunciatur autem verbis ſic.

Si aggregatum utriuſque baſis fruſti pyramidis, & mediæ inter ipſas proportionalis, ducatur in altitudinem fruſti: facti triens æqualis erit fruſto.

Item quia per 2 c 11, 2Aq+2Eq=Zq+Xq: Erit

H 2

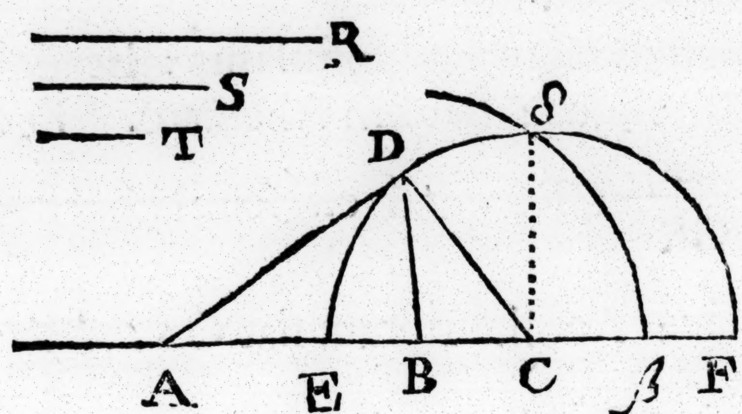
rit Zql + XqL + 2AEL æquale sex frustis, at per 11 c 18. Xq + 2AE = Z. Ergo Zq + Z in L æquale est sex frustis pyramidis. Atque hoc Theorema docet tertium modum commensurandi frusti pyramidis. Enunciatur autem verbis sic. Si ad aggregatum basium addatur quadratum aggregati laterum quadratorum utriusque basis, & summa eorundem ducatur in altitudinem frusti: facti sextans æqualis erit frusto.

At verò si quæstio sit de commensurando frusto Coni. Quia juxta Archimedæum inventum, semiperipheria circuli æqualis est $\frac{22}{7}$ Radii ferè: vel magis accuratè $\frac{355}{113}$ Rad: Erit area circuli $\frac{355}{113}$ Rad: q. Et 113 . 355 :: Rad: q. area circuli. Quare Theorema primum de commensurando frusto coni, est $\frac{355}{452}$ AqL + $\frac{355}{452}$ AqT $\frac{355}{452}$ EqT, æquatur triplo frusto. Secundum est $\frac{355}{452}$ Aq + $\frac{355}{452}$ Eq + $\frac{355}{452}$ AE in L, æquatur triplo frusto, Tertium est $\frac{355}{452}$ Zq + $\frac{355}{452}$ Z in L, æquatur sextuplo frusto Coni.

Probl: XXII. Problema Apollonii Pergæi ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ. Datis in plano duobus punctis A, B, describere circulum, in cujus circumferentiam rectæ lineæ AD, BD, ab iisdem punctis ductæ, datam habeant rationem R ad S.

Puta factum esse quod quæritur: sitq; circuli quæsiti centrum C in eadem recta linea cum punctis A, B; & semidiameter CD. Fiat R.S :: S.T. Quia triangula duo ACD, DCB (ubicunq; sumitur punctum D) sunt ut AC ad BC: Et latera DA, DB, communi angulo C similiter opposita, sunt in ratione R ad S: & latus CD utriq; commune: Non difficile erit concipere triangula ipsa ACD, DCB esse similia. Quare R, S :: DA. DB

DB::AC. DC::DC. BC. Et per 1 c 15, AC. BC::Rq. Sq::R. T. Si igitur pro BC ponatur A: Erit AB+A. A::R. T. Et AB × T + T × A = R × A: vel $\frac{AB \times T}{R - T}$ = A. Denique $\sqrt{}$: AC × BC: = DC.



Quæ enunciatur verbis ſic. Si punctorum intervallum ducatur in tertium rationis datæ terminis proportionalem: & factus dividatur per exceſſum termini primi ſupra tertium: Quotus æqualis erit diſtantiæ puncti citerioris à centro. Et latus quadratum rectanguli ſub utraque diſtantia à centro, æquatur ſemidiametro. Geometrica effectio facillima eſt.

Probl. XXIII. Datis dolii, ſive vaſis vinarii, longitudine interna 2CL, & ſemidiametris tum medii CB, tum baſis LD: invenire dolii ipſius capacitatem. Eſt quidem dolium fruſtum ſphæroideos, quæ fit revolutione ſemiſſis ellipſeos ſuper diametrum ſuam tranſverſam ſive axim. Ad menſuram autem fruſti inveniendam, tum totius ſphæroideos, tum abſciſſarum portionum menſuras ſciri oportet: harum enim menſurarum differentia eſt menſura fruſti.

Soliditas totius ſphæroideos eſt $\frac{11}{14}$ BCq in $\frac{2}{3}$ IK: qui duplus eſt conus baſis BCB, & altitudinis IK:

Archim: de conoid: & ſphæroid: prop. 29.

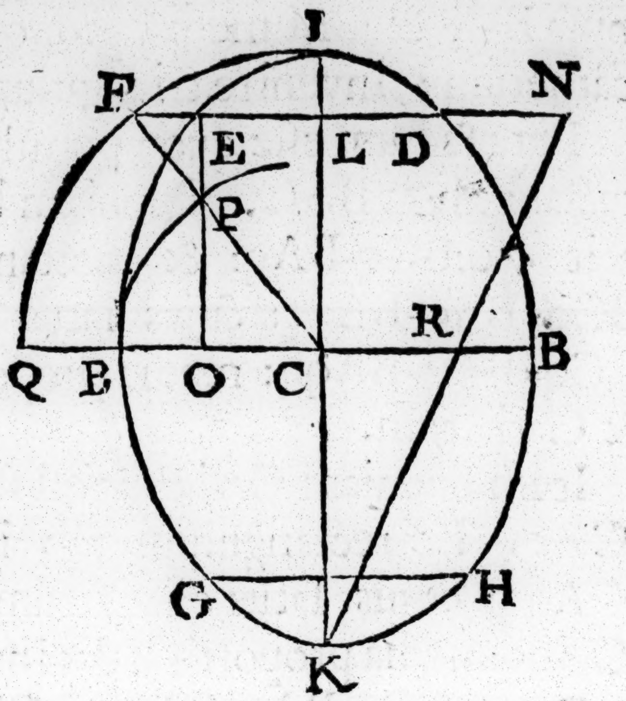
Soliditas verô portionis IED abſciſſæ habetur ſic. $LK.\,IK+KC :: \frac{3}{1}\frac{5}{1}\frac{5}{3} LDq$ in $\frac{1}{3} LI$. Soliditas quæſita Ibid: prop. 31.

Deſideratur autem adhuc (qui hujus negocii præcipuus eſt cardo) diameter tranſverſa ſive axis IK: quem ſic invenies.

Puta factum eſſe quod poſtulatur: Et deſcribatur ellipſis: & reliqua; ſicut in ſchemate. Et fiat $CK.\,CB :: CB.\,\frac{CBq}{CK} = CR$, quod eſt ſemilatus rectum per 13 l 1 conic: Apoll. Iterum fiat $CK.\,\frac{CBq}{CK} :: CK + CL.\,\frac{CBq \text{ in } CK+CL}{CKq} = LN$. ducatur in IL, hoc eſt $CK - CL$ (quod idem eſt ac ſi ducatur CBq in $CKq - CLq$ per 11 c 18) fietque $\frac{CBq \times CKq - CBq \times CLq}{CKq} = LEq$. per 13 l 1 conic: Apoll. Ergo $\sqrt{q}\,\frac{CBq \times CLq}{CBq - LEq} = CK$, ſemi-axi; hoc eſt $\frac{CB \times CL}{OP} = CK$.

Quod

Quod theorema verbis enuntiatur sic. Si quadratum semidiametri medii dolii ducatur in quadratum dimidiatæ longitudinis: & factus dividatur per differentiam quadratorum à semidiametris medii & basis: quori latus quadratum erit semiaxis sphæroideos.



Geometricè sic. Ducatur EO parallela axi. Et semidiametro CP=CB fiat arcus secans ipsam EO in P. continuetur CP donec concurrat cum base LE producta in F. Erit CF æqualis semiaxi quæsito. Aliter Quia CP=CB: & CO=LE: erit (√u:CBq -LEq) OP. CB::CL.CF=CK.

Consectarium. Atque hinc patet meridianos in Analemmate esse veras Ellipses. verbi gratia, cogitetur quadrans Analemmatis CIFQ. in quo descripta sit Ellipsis IEB. Dico eandem esse Meridianum. Nam cum CQ sit quadrans Æquinoctialis, & FL quadrans paralleli: sitq; meridianorum proprium secare Æquinoctialem, & omnes circulos ipsi parallelos, in segmenta similia, per 10, 12 Theod: de sphæra. Si igitur constiterit esse CQ.CB::LF.LE: Ellipsis IEB secans ipsos erit meridianus. At verò C =CQ: & CP =CB: & OC=LE: Estque CF.CP::LF.OC. Ergo,

Probl. XXIV. Datis trianguli rectanguli hypotenusa BC, & CM mediâ proportiontli inter basem & cathetum; invenire triangulum.

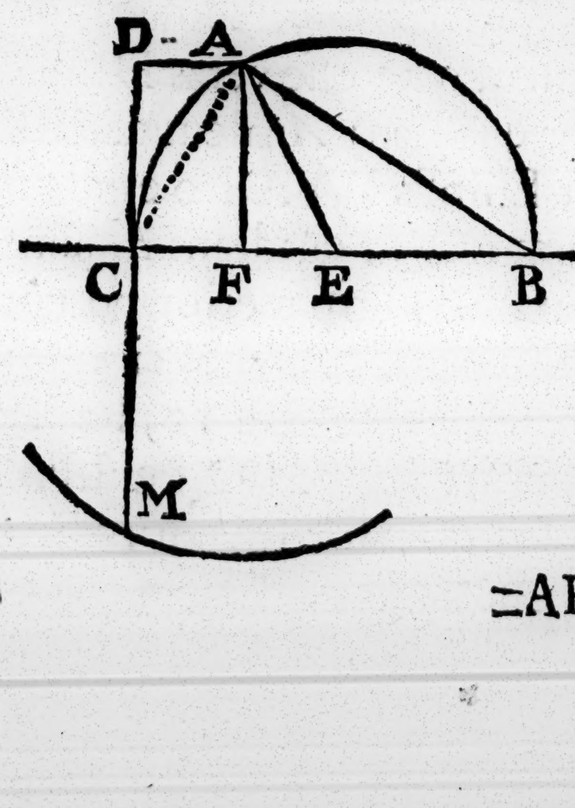
Puta factum esse quod postulatur: sitq; triangulum rectangulum BAC. Quoniam basis est BA, Cathetus erit $\surd$q:BCq-BAq: & rectangulum sub ipsis $\surd$q: BCq$\times$BAq-BAqq: cujus latus quadratum est $\surd$qq: BCq$\times$BAq-BAqq: media proportionalis inter basem & Cathetum.

Item quoniam Cathetus est CA, Basis erit $\surd$q:BCq -CAq. Et rectangulum sub ipsis, $\surd$q:BCq$\times$CAq -CAqq: cujus latus quadratum est $\surd$qq: BCq$\times$CAq -CAqq: media proportionalis inter basem & Cathetũ.

Quare BCq$\times$BAq-BAqq $=$ CMqq. Et
BCq$\times$CAq-CAqq $=$ CMqq.

Ergo per 9 c 16, $\frac{1}{2}$BCq $\pm$ $\surd$q:$\frac{1}{4}$BCqq-CMqq. $=$ $\left.\begin{matrix}\text{BAq}\\ \text{CAq}\end{matrix}\right\}$

Quod Theorema enuntiatur verbis sic. Si dimidiato hypotenusæ quadrato, latus quadratum excessus quadrantis quadrato-quadrati hypotenusę supra quadrato-quadratum medii proportionalis inter basem & Cathetum, addatur; aggregatum erit basis quadratum: sin auferatur, reliquum erit quadratum Catheti.



Geometricè sic. Dimetro BC, & centro E medio, describatur semicirculus: Tum fiat BC. CM :: CM. CD $=$AF

$=$AF perpendic: intra semicirculum. Est igitur BC $\times$ AF$=$GMq. compleatur triangulum BAC Nam $\frac{1}{4}$BCq (AEq)-AFq$=$EFq.

$$\text{Quare } \tfrac{1}{2}\text{BC} \pm (\text{EF})\ \sqrt{q}{:}\ \tfrac{1}{4}\text{BCq-AFq}{:} = \left\{\begin{array}{l}\text{BF.}\\ \text{CF.}\end{array}\right.$$

Ducantur omnia in BC: fietque

$$\tfrac{1}{2}\text{BCq} \pm \sqrt{q}{:}\ \tfrac{1}{4}\text{BCqq- (BCq}\times\text{AFq) CMqq}{:} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{BC}\times\text{BF}=\text{BAq.}\\ \text{BC}\times\text{CF}=\text{CAq.}\end{array}\right.$$

Probl: XXV. Datis trianguli rectanguli base BA, & AM mediâ proportionali inter hypotenusam & Cathetum, invenire triangulum.

Puta factum esse quod postulatur: sitque triangulum rectangulum BAC. Quoniam Cathetus est CA, hypotenusa erit $\sqrt{q}$: BAq+CAq: Et media inter ipsas proportionalis $\sqrt{qq}$: CAqq+BAq$\times$CAq.

Item quoniam hypotenusa est BC, cathetus erit $\sqrt{q}$: BCq-BAq: Et media inter ipsas proportionalis $\sqrt{qq}$: BCqq-BAq$\times$BCq.

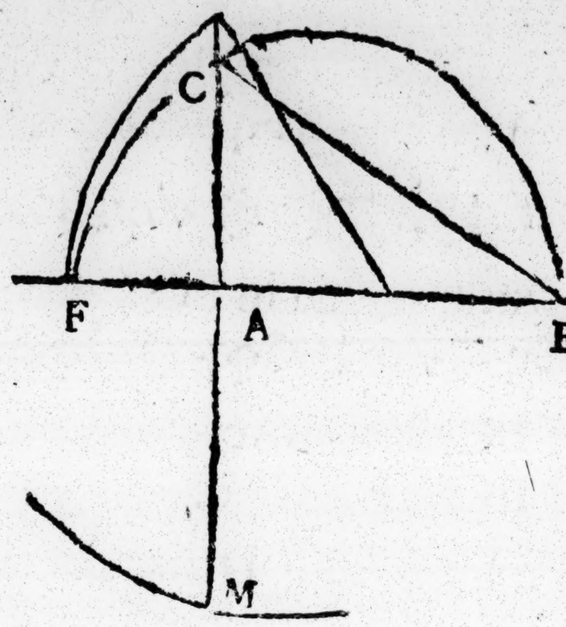
Quare CAqq+BAq$\times$CAq$=$AMqq. Et
BCqq-BAq$\times$CAq$=$AMqq. Ergò per 9 c 16

$$\sqrt{q}{:}\ \tfrac{1}{4}\text{BAqq+AMqq}{:} \mp \tfrac{1}{2}\text{BAq} = \left\{\begin{array}{l}\text{CAq.}\\ \text{BCq.}\end{array}\right.$$

Quod Theorema verbis enuntiatur sic. Si lateri quadrato summæ ex quadrante quadrato-quadrati basis, & quadrato-quadrati mediæ proportionalis inter hypotenusam & Cathetum, dimiatum basis quadratum auferatur, reliquum erit Catheti quadratum: sin addatur, aggregatum erit quadratum hypotenusæ.

Geometricè

Geometricè sic. Fiat BA. AM:: AM. AD perpendic: est igitur $BA \times AD =$ MAq. ex medio basi-puncto E ad perpendicularem AD, ducatur ED = EF. Et diametro BF describatur semicirculus secans AD in C. Tum ducta BC compleatur triangulum BAC. Nam $\frac{1}{4}BAq + ADq = EFq$.



$$\text{Quare } \sqrt{q}\!:\ \tfrac{1}{4}BAq + ADq\!:\ \mp\tfrac{1}{2}BA = \begin{cases} AF. \\ BF. \end{cases}$$

Ducantur omnia in BA: fietque

$$\sqrt{q}\!:\tfrac{1}{4}BAqq + (BAq \times ADq)\ AMqq\!:\ \mp\tfrac{1}{2}BAq =$$

$$= \begin{cases} BA \times AF = CAq. \\ BA \times BF = BCq. \end{cases}$$

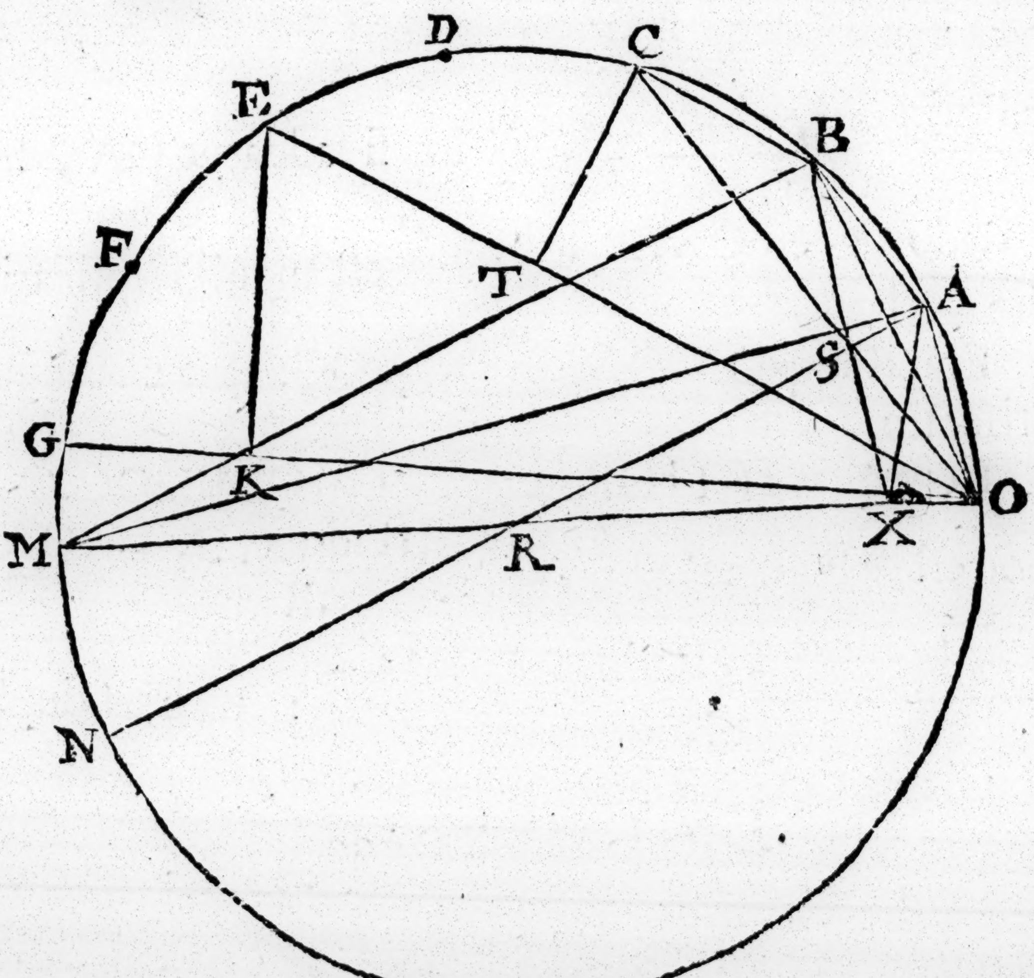
Consectarium. Atque ex his duabus proportionibus patet æquationum, in quibus sunt tres species æqualiter in ordine scalæ ascendentes, quarum suprema sit quadrato-quadratica, effectio Geometrica.

Probl: XXVI. De angulorum sive peripheriarum bisectione, trisectione, quinquisectione, septisectione, pauca etiam, ad Analytices præstantiam, usumque admirandum, ostendendum, apponam. Geometricam quidem praxim adhuc inventam non habent: sicut nec Mesolabium inventum est. At verò in Sectione 15 Cap. XVIII, Æquationes quasdam Cubicas prælibavi;

qua

qua etiam solertia, alias innumeras *Analytices* studiosus poterit comminisci, quarum fortasse ope mesolabium hactenus tenebris obvolutum, in lucem tandem Proferatur.

Distinguantur in peripheria septem æquales partes ab O fine diametri literis A B C D E F G: ducantur subtensæ, sicut fit in schemate. Sumantur MX=MB. ducantur etiam AX & XB; & diameter NRA; & ad OE perpendicularis CT; & ad OG perpendicularis EK. Quoniam per 17 Cap. XVIII, Theor: 1, AB=AX: erunt triangula BMX, ORA, OAX, similia; ideoque $\frac{OAq}{Rad.}$=OX. Sunt etiam triangula OAB,



ARM,

ARM, similia. Et per 47 e 1, $MA = \sqrt{q}: 4Radq - OAq$.

His sic præmissis, erit RA. MA, hoc est, Rad. $\sqrt{q}: 4Radq - OAq :: OA. OB$. Ergo $\frac{4Radq \times OAq - OAqq}{Radq} = OBq$: quæ est anguli duplicatio.

Et $4Radq \times OAq - OAqq = Radq \times OBq$: quæ est anguli bisectio.

Deinde quia $OS = OA$. & $SA = OX$. & $NS = MX = MB$. Erit per 17 e 18. Th: 16. $\frac{NS \times SA}{OS} = SC$: hoc est $2Rad - \frac{OAq}{Rad}$ in $\frac{OAq}{Rad}$, divisa per OA, vel $\frac{2Radq \times OA - AOc}{Radq} = SC$. Et si addatur OA, fiet $\frac{3Radq \times OA - OAc}{Radq} = OC$: quæ est anguli triplicatio.

Et $3Radq \times OA - OAc = Radq \times OC$: quæ est anguli trisectio.

Item quia $2ET + CB = OE$. Et $MO . MB :: OC . OT$: hoc est $2Rad . 2Rad - \frac{OAq}{Rad} :: \frac{3Radq \times OA - OAc}{Rad} . \frac{6Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{2Rqq}$: E cujus duplo si tollatur OA: restabit $\frac{5Radqq \times OA - 5Radq \times OAc + OAqc}{Rqq} = OE$: quæ est anguli quintuplatio. Et $OAqc - 5Radq \times OAc$

+5

+5Radqq×OA=Radqq×OE: quæ eſt anguli quinquiſectio.

*A*tque hac forma progredi licet ad Septiſectionem inveniendam, Nempe 7Rcc × OA-14Rqq × OAc +qR q×OAqc+OAqqc=R cc×OG.

Nam MO. MB :: OE. OK. Et 2OK-OC=OG. Operationem ſtudioſis relinquo.

Verùm quia Radius ponitur 1, quæ in Multiplicatione & Diviſione, nihil mutat: idcircò in hiſce omnibus Æquationibus, Radius cum omnibus ſuis poteſtatibus, omitti poterit.

Sed quo artificio iſtiuſmodi operoſæ Æquationes (in quibus non ſunt tantum tres ſpecies æqualiter in ordine ſcalæ aſcendentes) ſolvantur, quanquam non eſt hujus inſtituti docere: tamen quod in hoc negotio in uſum nobiliſſimi doctiſſimique Domini Gerardi *A*ungier, Domini Aungier & Baronis de Longford, ante plurimos annos, commentus ſum, in gratiam ſtudioſorum Mathematices, qua poſſum brevitate, in lucem proferre non pigebit.

SOLI DEO GLORIA.

DE ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIONE IN NUMERIS.

1. COnstruendæ Æquationis affectæ modus. Sumatur, ut lubet, pro B, 3: pro Cq, 16: pro Dc, 125: pro Fqq, 1296: &c. Nec refert utrum numeri sumpti sint verè figurati necne. Sitque ex his Coëfficientibus construenda Æquatio Quadrato-cubica. Ea pro modo Tabulæ Analyticæ posterioris in ordine Quadrato-cubico, conflata, esto Lqc-5BLqq+10CqLc-10DcLq+5FqqL=Gqc. Quæ in numeris, statuendo L (radicem) 47, erit 1qc -15qq+160c-1250q+6480l=170304782. vel omissa *unciarum* distinctione, pro 15qq, dic BLqq, pro 160c, dic CqLc; pro 1250q, dic DcLq; & pro 6480l, dic FqqL. Nam si L sit 47; erit Lq=2209: & Lc =103823: & Lqq=4879681: & Lqc=229345007.

constructionis

Conſtructionis hujus Practica.

BLqq	229345007	Lqc
15 × 4879681	-73195215	
CqLc	156149792	
160 × 103823	+16611680	
Dc Lq	172761472	
1250 × 2209	-2761250	
Fqq L	170000222	
6480 × 47	+ 304560	
	170304782	Gqc

2. Proponatur Æquatio quæcunque, puta modò inventam.

1qc-15qq + 160c-1250q + 6480l=170304782:

Vel numeris in ſymbola mutatis,

Lqc-BLqq+CqLc -DcLq + FqqL=Gqc:

Et ſi plures eſſent affectionum Species, conſequenter efferri poterunt per Hcc, Kqqc, Mqcc, Nccc, & ſic ulterius.

3. Radices L ex his inveſtigandæ duæ erunt partes, nempe A latus primum, & E latus ſecundum, ſive ſubſequens quodlibet. Quare L=A+E: & omnes poteſtates ex L, æqualiter conſimilibus poteſtatibus ex A+E: v. g. Lq=Aq+2AE+Eq: & Lc=Ac+3AqE +3AEq+Ec. &c.

Qui igitur numeroſam hanc poteſtatum affectarum reſolutionem cupit addiſcere, eum in purarum poteſtatum Geneſi & Analyſi, bene verſatum eſſe oportet.

4. In Æquatione propoſitâ, poteſtas reſolvenda 170304782, ſive Gqc, eſt Quadrato-cubica, cujus

etiam

etiam generis sunt singulæ affectionum Species. Nam *Heterogenea inter se nec addi possunt, nec subtrahi.*

5. Quare in singulis affectionibus duo sunt considerande, Gradus affectionis, & Coëfficiens: ut in 15qq, affectionis gradus est Quadrato-quadraticus, & coëfficiens 15, lateralis: In 160 c, affectionis Gradus est cubicus, & Coëfficiens 160, Quadraticus: In 1250q, affectionis Gradus est Quadraticus, & coëfficiens 1250, cubicus: denique in 6480 l, affectionis gradus est lateralis, & coëfficiens 6480, Quadrato-quadraticus: sicut ex utraque Æquationis designatione comparata clarissimè liquebit. Atque hinc duo oriuntur Consectaria pro laterum singularium extractione.

6. Primum Consectarium est, Si coëfficientis pro sua specie, radix, ducta in affectionis gradum, multiplicet ipsum coëfficientem: factus erit ejusdem generis cum potestate resolvenda: Ut in præcedente Æquatione, si latus 15 Quadrato-quadraticè multiplicatum, ducatur in 15; & si √q 160 cubatum, ducatur in Quadratum 160; & si √c 1250 quadratum, ducatur in cubum 1250; denique si √qq 6480 ducatur in Quadrato-quadratum 6480; ex singulis hisce multiplicationibus emerget numerus Quadrato-cubicus. *Atque hæc multiplicatio Analytica, modus est reducendi coëfficientem quemlibet ad speciem potestatis resolvendæ,* in lateris primi singularis extractione usitatissimus.

7. Unde etiam clarissimè liquet, quod si numerus ex coëfficientibus hoc modo reductis, atque comparatis, emergens, minor sit potestate resolvenda, latus ipsius etiam minus est latere potestate resolvendæ; Si verò major, est majus; & si æqualis, æquale. In hac igitur

igitur Æquatione, 1qc-15qq+160c-1250q+6480 l =170304782; vel 170304782+15qq-160c+1250q -6480 l=1qc; si tum coëfficiens lateralis 15, tum √q160, tum √c 1250, tum √qq 6480, Quadrato-cubentur; prodibunt quatuor affectionum species homogeneæ, nempe 7593.., 3238.., 1450.., 0581.., Quod quidem per Logarithmos facillime fit, satisque pro proposito accuratè. Operationis ratio, ex fine hujus Tractatus (ubi de Logarithmorum notitiâ pauca traduntur) petenda, sic est. (Vide Sect:27, una cum pag:149, &c.)

Logarithmi. Numeri Coëfficientes
1)2)3)4) sunt dimensiones in Coëfficiente.

Logarithmi.		Numeri Coëfficientes
1) 5 × 1, 17609		15 qq
5, 88045		+7593..
2) 2, 20412		160 c
5 × 1, 10206.	12|65	
5, 51030		-3238..
3) 3, 09691		1250 q
5 × 1, 03230.	10|8.	
5, 16150		+ 1450..
4) 3, 81157		6480 l
5 × 0, 95289.	8|97	
4, 76445		-0581..

In Æquatione inter proposita, speciebus pro signo-

rum ratione in unam summam aggregatis, erit 170304700+759300−3238000+145000−058100 =1qc=170827100. Quod etiam in aliis æquationibus similiter fieri poterit.

8. Secundum est, Si potestas resolvenda per Coefficientem dividatur, quotus ad ipsum affectionis gradum referretur: hoc est, quotus erit latus, si affectio sit sub latere; vel quadratum, si sub quadrato; & sic de reliquis gradibus: Ut in priore Æquatione, si 170304782 dividatur per 15, quotus erit Quadrato-quadraticus; si per 160, quotus erit cubicus; si per 1250, quotus erit Quadraticus; si denique per 6480, quotus erit lateralis. Quare non semper ipse quotus, sed ipsius plerumque radix pro affectionis gradu, erit latus singulare eliciendum.

9. In secundæ etiam radicis investigatione hoc teneri debet; quòd pro numero figurarum in quoto censendus fere erit ejus gradus: ut si quotus unica constet figura, sit latus; Si duabus, Quadratum; si tribus, cubus, &c. Et si quotus superet 5, vel 50, vel 500, &c. ad gradum fortasse sequentem, in grandioribus præsertim affectionibus, poterit extendi. Atque *hæ sunt divisionis Analyticæ leges.*

10. Nec in istiusmodi *Multiplicatione* atque *Divisione*, totam potestatem resolvendam, cum toto Coëfficiente, percurrere opus erit; Sed solummodo ad punctum congruens proximum.

11. Nam in resolutione affectarum Æquationum punctationes omnes gruduum fieri debent, in potestate resolvenda, sicut in puris: Supremi quidem gradus supra: reliquorum verò infrà. Coëfficientes etiam,

pro

pro ſua quiſque ſpecie, punctandi ſunt. Prioris exempli punctationes ſic erunt,

1qc-15qq+160c-1250q+06410l=170304782

12. Debet autem regulariter (præſertim ſi Coëfficiens ſit negativus) numerus punctorum in ſingulis eſſe æqualis. Quare ſi poteſtas reſolvanda puncta plura, ſive pauciora habeat ſupra ſe, quam Coefficiens; tot deficienti præponantur circuli, ut puncta utrobique poſſint eſſe æqualia. Et in ſingulis lateribus eruendis punctum coëfficientis lateri illi proprium, ad patile poteſtatis reſolvendæ punctum ſuperius, accommodandum eſt: quod quidem fiet, ſi unitatis locus in coëfficiente, ad puncta poteſtatis inferiora gradui ſuo convenientia, ordine dimoveantur.

13. Si Coëfficiens aliquis ſit fractio, ſive latus ſurdum; reducatur ad integros cum partibus decimalibus.

14. Et ſi opus ſit radicis eductionem in partibus decimalibus perſequi: poſt lineam ſeparatricem circulos quot viſum erit adſcribes, eoſque ſupra & ſubtus, punctis conſimiliter inſignire perges.

15. Tabula oſtendens tum *Diviſores*, tum *Gnomones*, pro laterum ſingularium in Æquationibus affectis inveſtigatione; collecta & continuando ex tabella Analytica poſteriore. Et nota, quod Coëfficientis cujuſque ſpecies omnes ſunt affirmatæ, ſi ipſa ſit affirmata; negatæ vero, ſi negata.

Pro Primo Latere.	Pro lateribus ſingularibus ſequentibus, ad complendum *Gnomonem*.					
Aq	2AE .	Eq				= Cq
BA	BE .					
Ac	3AqE .	3AEq .	Ec			= Dc
BAq	B2AE .	BEq .				
CqA	CqE .					
Aqq	4AcE .	6AqEq .	4AEc .	Eqq		= Fqq
BAc	B3AqE .	B3AEq .	BEc .			
CqAq	Cq2AE .	CqEq .				
DcA	DcE .					
Aqc	5AqqE .	10AcEq .	10AqEc .	5AEqq .	Eqc	= Gqc
BAqq	B4AcE .	B6AqEq .	B4AEc .	BEqq .		
CqAc	Cq3AqE .	Cq3AE .	CqEc .			
DcAq	Dc2AE .	DcEq .				
FqqA	FqqE .				&c.	

16.

16. *Divisores* ubique sumuntur ex iis, quæ in data habentur mensura, justo ordine dispositis, atque aggregatis, habita signorum ratione.

17. Si Æquationis alicujus suprema potestas sit negativa, Æquatio illa est ambigua.

18. Latus singulare primum elicitur ex his *Regulis*, desumptis ex duobus consectariis in Sect. 6. & 8.

Prima. Si Coëfficiens ita longè in posteriora decedit, ut vix ad primum potestatis resolvendæ punctum pertingat; nec (Analyticè etiam reductus) enormem in illo mutationem faciat: in extractione lateris singularis primi, negligi omninò poterit.

Secunda. Si Coefficiens in anteriora prorumpit, sitque affirmativus: devolendus est in puncta consequentia, donec locus divisioni fiat. Per quam divisionem quotus inventus ad gradum affectionis referretur. Quod etiam in extractione minoris radicis Æquationibus ambiguæ intelligi debet.

Tertia. Si vero negativus sit, & pluribus constet punctis, quam potestas resolvenda; suppleantur loci deficientes circulis præfixis: & pro latere primo singulari, sumatur ipsa coëfficientis, pro suo genere, radix.

Quarta. Si utrobique puncta sint æqualia, & numeri in primo tum coëfficientis, tum potestatis resolvendæ, puncto, non multum discrepent: Coëfficiens per radicem suam, pro specie qua punctatur, sub congruente puncto extractam, ad potestatis speciem (per Analyticam multiplicationem) reductus, potestati resolvendæ addatur, si sit negativus; vel auferatur, si affirmativus. Nam si sit Ac + CqA = Dc, erit Ac

 = Dc

$=$Dc $\mp$CqA. At si Æquationis ambiguæ latus majus quæratur, Potestas resolvenda è coëfficiente reducto auferatur. Nam si sit CqA-Ac$=$Dc, erit Ac$=$CqA -Dc. Tum summæ vel differentiæ radix, erit latus primum eliciendum. Et nota, quod Æquationis ambiguæ latus majus, aliquando per divisionem; aliquando per extractionem radicis è coëfficiente; sed plerumque per reductionem coëfficientis investigatur.

19. Atque his præceptis solerter perpensis, Illud demùm verum latus singulare primum erit, quod primò omnium talem exhibet diagonalem, qui unà cum coefficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabellam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam (diligente ubique tum signorum, tum sedium, respectu habito) aggregatis; numerum profert potestate resolvendâ, unde subtrahendus est, non majorem. Notandum autem est, quod numerus negativus quantuscunque, minor est omni tum affirmativo, tum negativo minore: ut-4 minor est quam 1,& quam -1. Item quod subductio mutat signum numeri subducendi: ut ex 4 tolle 6, restat 4-6, hoc est-2. Et ex-4 tolle-6, restat-4+6, hoc est 2. Denique ex 4 tolle-6, restat 4+6, hoc est 10. Quare in lateris primi singularis extractione, tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris; quod per proximè majus, certissimè agnosces.

20. In constitutione divisoris pro secundo latere investigando; Coëfficientis ductæ in gradum quemlibet, sedes ordinari debet secundum proprii gradus punctationem; hoc est, Coëfficientis sub latere sedes

distabit

distabit versus sinistram, à puncto sive sede ipsius Coëfficientis, uno loco: Coëfficientis sub quadrato sedes, duobus locis: sub cubo, tribus: &c. Et ob vitandam confusionem, utile erit in residuo potestatis resolvendæ, punctationes illas, quæ præsenti radici eruendæ inserviunt, solas distinguere.

21. Tum latus singulare secundum elicietur sic: Divisores cujusque generis, ex tabula precedente inventi, & justo ordine dispositi, in unam summam aggregentur; & per totalem illum divisorem, reliquum potestatis resolvendæ dividatur. Nam quotus juxta divisionis Analyticæ leges (si id usus exigat) perpensus, dabit latus singulare secundum eliciendum. Cæterùm in hac investigatione multotiès, præsertim si magnitudinum dividentium negativarum aggregatum, aggregato affirmativarum penè æquetur (adeò ut Divisor Reliquo potestatis resolvendæ minor admodum sit) maxima inest lubricitas: quam tamen Analysta sagax facile effugiet.

22. Hæc igitur Regula esto perpetua. Illud demùm verum latus singulare secundum est; quod primò omnium talem exhibet *Gnomonem*, constantem ex complementis cujusque generis, & Coëfficientibus, sicut Æquationis conditio postulat, juxta tabulam præcedentem, multiplicatis; omnibusque in unam summam, diligente ubique tum signorum, tum sedium, habita ratione, aggregatis; qui *Gnomon* non major sit potestate resolvenda unde subtrahendus est. Quare tentandum aliquoties est, donec latus verum inveneris: quod etiam per proximè majus, certissime agnosces.

23. Latera omnia ſingularia poſt ſecundum, per Diviſionem ſimplicem facillimè acquiruntur.

24. Si affectiones ſint compoſitæ ex affirmativis, & negativis: antecedentia præcepta mixtim ſunt cum ſolertia & judicio uſurpanda. Et in lateribus æſtimandis præponderabit ſemper affectio major, minori. Verùm totum hoc negotium Analyticum, quod verbis enarrare diſſicillimum foret, frequens exercitatio, tum in Geneſi, tum in Analyſi poteſtatum cujuſque generis, facile ſatis reddet, atque familiare.

25. Sed quia ſuperius aliquoties dictum eſt, tentatu opus eſſe; quod quidem in affectionibus multiplicibus, & ubi gradus ſunt elatiores, valde laborioſum erit: apponam hic, coronidis loco, duos modos ejuſmodi tentamenti levandi: unum per Depreſſionem, ex Cap. XVI. Sect. 7. *Clavis*: alterum per Canonem Logarithmorum 1000. In utroque autem ſi Æquatio fuerit ambigua, ſigna ejus omnia erunt mutanda. Notandum etiam hic eſt, quod numerus negativus quantuſcunque, minor eſt omni tum affirmativo, tum negativo minore.

26. Inventio laterum ſingularium per Depreſſionem. Si latus primum quæratur: In ſingulis Æquationis datæ ſpeciebus abſcindantur lineâ ſeparatrice omnia puncta poſt primum. Deinde applicentur omnes ſpecies ad latus; hoc eſt, deprimantur uno gradu.

Exempl: I. 1qq - 72c + 2386001 = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1c + 238 6 - 72 q = L) 872 5.
Eſto A 4. Erit 4) 872 5 (218 1 juſtus.

Et

Et + 64 + 2386 — 1152 = 1874, minor justo.
Esto A 5. Erit 5) 8725 (1745, justus.

Et + 125 + 2386 — 1800 = 1836; major justo.
Latus igitur verum A = 5-1, hoc est, 4.

Exempl: II. De Æquatione ambigua. 1c-3257l = -45744. Hæc deprimendo fiet 1q-325 = L)-457.

Esto A 4. Erit 4) — 457 (— 114, justus.

Et + 16 — 325 = -165, minor justo.
Esto A 5. Erit 5) — 457 (— 91, justus.

Et + 25 — 325 = — 75, major justo.
Latus igitur verum A = 5 — 1, hoc est, 4.

Si latus secundum quæratur: In singulis speciebus abscindantur omnia puncta post secundum. Deinde applicentur omnes species ad quadratum; hoc est, deprimantur duobus gradibus. Ut in Exemplo I.

1qq — 72c + 238600l = 8725815. Hæc Deprimendo fiet 1q + L)238600-72l = Q) 8725815.

Esto A 47: erit 2209) 8725815 (3949. Justus.
Et 2209 + 5077 — 3384 = 3896. minor justo.
Esto A 48: erit 2304) 8725815 (3787. Justus.
Et 2304 + 4971 - 3456 = 3819: major justo.
Latus igitur verum est 48 — 1, hoc est, 47.

27. Inventio lateris singularis secundi per *Logarithmos.*

Index Logarithmi cujusque desumitur ex tabella in initio *Clav.* pro distantia primæ suæ figuræ, ante vel post locum unitatum, cujus Index est 0. Eædem igitur figuræ, eodem ordine dispositæ, eundem habent Logarithmum: Indices vero diversi esse possunt. Ut

numer

numeri 436, Log: eſt 2,6394865 at numeri 43600, eſt 4,6394865. & numeri 4|36, Log: eſt 0,6394865. Denique numeri 0|00436, Log: eſt 3,6394865.

Summa duorum Logarithmorum, Logarithmus eſt facti à valoribus: differentia autem, Logarithmus eſt quoti. Ut quia 4|36×9 = 39|24 hujus Log: 1,5937290 = 0, 6394865 + 0, 9542425. Et quia 9)39|24(4|36: hujus Log: 0,6394865 = 1,5937290 − 0,9542425.

Logarithmus lateris, ductus in numerum dimenſionum cujuſque poteſtatis, eſt ejuſdem poteſtatis Logarithmus: Ut quia numeri 436, Log: eſt 2,6394865: Erit 2,6394865×2 = Log: Q: 436. Et 2,6394865×3 = C:436: Et 2, 6394865×4 = QQ: 436, &c.

Logarithmus poteſtatis cujuſque diviſus per numernm dimenſionum ſuarum, exhibet Logarithmum radicis ſuæ.

Si in Serie Geometricè continuè proportionalium Logarithmus primi termini tollatur è Logarithmo ſecundi, reliquus erit Logarithmus rationis: Qui, ſi in numerum terminorum minus uno (qui numerus eſt rationum) ducatur; deindeque Logarithmo primi termini augeatur; Logarithmus erit termini ultimi.

28. Atque hæc de Logarithmorum notitia ſatis ſunto: quibus intellectis, reliquam operationem, exempla ſequentia diligenter inſpecta, facilem reddent: In qua etiam omnes punctationes, poſt duas primas, linea ſeparatrice abſcindendæ ſunt.

Ex-

Exempl:I. $1qq - 72c + 2386001 = 8725815$. Justus.
Sunto duo prima latera singularia.

		-72	$+238600$
47. 1,67209	8	1,85733	5,37767
Cu: 5,01629		5,01629	1,67210
QQ: 6,68839		6,87362	7,04977
+4880...		−7475...	+11213...

Et + 4880... +11213... −7475... = +8618... minor justo.

48. 1,68124	1	1,85733	5,37767
Cu. 5,04372		5,04372	1,68124
QQ. 6,72496		6,90105	7,05891
+ 5308...		−7963...	+11455...

Et +5308 +11455 −7963 = +8800... major justo.
Radix igitur vera erit 48−1, hoc est, 47.

Exempl: II. $1c - 3257l = -45744$. Justus.
Sunto duo prima latera singularia

		-3257
48. 1,68124	1	3,51282
Cu. 5,04372		1,68124
+ 1106		5,19406
		−1563

+1106 −1563 = −457, minor justo, (saltem non major.)

49. 1,69019	6	3,51282
Cu. 5,07059		1,69020
+ 1176		5,20302
		−1596

+1176 −1596 = −420; major justo.
Radix igitur vera erit 49 −1, hoc est, 48.

Latus

Latus secundum investigari poterit per Logarithmos, etiam Depressione præcedente. Ut in Exemplo V. 1qq — 1246|00q = 08972|6256. Hæc quadraticè depressa fiet 1q — 1246 = Q)8972|6.

Supponatur duo prima latera singularia,

8972|61

34.	1,53148	3,95337
Q.	3,06296	3,06296
+	1156	0,89041: valor 7|76 Justus.

+ 1156 — 1246 = -90: minor justo.

36.	1,55630	3,95337
Q.	3,11260	3,11260
+	1296	0,84077: valor 6|93 Justus.

+ 1296 — 1246 = +50: major justo.

Radix igitur vera cadit inter 34 & 36.

Atque hoc modò in XXVIII Sectionibus, sive Præceptis (qui numerus est perfectus) doctrinam de Æquationum affectarum resolutione in numeris, adjuvante Deo omnium bonorum Datore, expedivi: Ejus igitur sit omnis laus, honor, & gloria in sempiternum. *Amen.*

Exempla

Exempla quædam Æquationum Resoluta-rum in Numeris.

ÆQuationum Quadraticarum, omniumque in quibus sunt tres species in ordine scalæ æqualiter adscendentes, Analysi supersedebo: quia in cap. XVI. Sect. 9. *Clavis*, modus facilior traditus est, quàm per generalem hanc methodum præstari poterit: Et ad Exempla Æquationum aliter affectarum progrediar. Denique in fine, Notas ad Exempla, subjungam; in quibus operationis ratio, in laterum singularium investigatione, ex præceptis superiùs traditis, aperietur.

Initium faciam à Resolutione numerosæ Æquationis primò constitutæ, Nempe

1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782.

Hoc est, Lqc - BLqq + CqLc - DcLq + FqqL = Gqc

Exemplum

Exemplum I.

1qc - 15qq + 160c - 1250q + 6480l = 170304782.

Hoc est, Lqc - BLqq + CqLc - DcLq + FqqL = Gqc.

	170304782	(47
	15	−B
	1250	−Dc
	160	Cq
	6480	Fqq
	1024	Aqc
	10240	GqAc
	25920	FqqA
+	11289920	
	38400	−BAqq
	200000	−DcAq
	−4040000	
	7249920	*Ablatit.*
R	97805582	
	1280	5Aqq
	640	10Ac
	160	10Aq
	20	5A
	7680	Cq3Aq
	1920	Cq3A
	160	Cq
	6480	Fqq

† 1

+142	50040	
38	40	-B4Ac
1	440	-B6Aq
	240	-B4A
	15	-B
1	0000	-Dc2A
	1250	-Dc
-40	87665	
†101	62375	*Divisor.*
896	0	5AqqE
313	60	10AcEq
54	880	10AqEc
4	8020	5AEqq
	16807	Eqc
53	760	Cq3AqE
9	4080	Cq3AEq
	54880	CqEc
	45360	FqqE
†1333	62047	
268	80	-B4AcE
70	560	-B6AqEq
8	2320	-B4AEc
	36015	-BEqq
7	0000	-Dc2AE
	61250	-DcEq
-355	56465	
+978	05582	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum II.

$$1c + 4200000l = 247651713$$

Hoc est, $Lc + CqL = Dc$.

	247651713	(417
	4200000	Cq
	64	Ac
	1680000	CqA
	2320000	*Ablatit.*
R	15651713	
	48	3Aq
	12	3A
	420000	Cq
	912000	*Divisor.*
	48	3AqE
	12	AEq
	1	Ec
	420000	CqE
	912100	*Ablatit.*
R	6530713	
	50433	3Aq
	123	3A
	4200000	Cq
	925530	*Divisor.*
	35301	3AqE
	26027	3AEq
	343	Ec
	9400000	CqE
	6530713	*Ablatit.*

4	1
16	8
	1
16	81

Exem-

Exemplum III.

$1C + 1007Q = 247617936$

Hoc est $Lc + BLq = Dc$.

	247617936	(417
	1007	B
	64	Ac
	16112	B Aq
	22512	*Ablatit.*
R	22497936	
	48	3Aq
	12	3A
	8056	B2A
	1007	B
	130767	*Divisor.*
	48	3AqE
	12	3AEq
	1	Ec
	8056	B2AE
	1007	BEq
	130777	*Ablatit.*
R	9420236	
	5043	3Aq
	123	3A
	82574	2BA
	1007	B
	1332277	*Divisor.*
	35301	3AqE
	6027	3AEq
	343	Ec
	578018	B2AE
	49343	BEq
	9420336	*Ablatit.*

4		1
16		
	8	
		1
16	81	

Exemplum IV.

1qq -- 442990051 = 0222520086

Lqq — Dc L = Fqq.

	0	2225	2086	(354
	--44	2990	05	— Dc
	±81			Aqq
	--132	8970	15	— DcA
	--51	8970	15	*Ablatit.*
R	52	1195	3586	
	108			4Ac
		54		6Aq
		12		4A
	+ 11	2		
	--4	4299	005	— Dc
	+ 6	9220	995	*Divisor.*
	54	0		4AcE
	13	50		6AqEq
	1	500		4AE
		625		Eqq
	+ 69	0625		
	--22	1495	025	— DcE
	± 46	9129	975	*Ablatit.*
R	5	2065	3836	
	+ 1	2793	7395	*Divisor.*
	± 5	2065	3836	*Ablatit.*

Exemplum

Exemplum V.

1qq-124600q=089726256, Lqq-CqLq=Fqq.

0	8 9 7 2	6 2 5 6	(354
- 1 2	4 6 0 0		-Cq
+ 8 1			Aqq
-1 1 2	1 4 0 0		-CqAq
-3 1	1 4 0 0		*Ablatit.*
R 3 2	0 3 7 2	6 2 5 6	
1 0	8		4Ac
	5 4		6Aq
	1 2		4A
+ 1 1	3 5 2		
7	4 7 6 0	0	-Cq2A
	1 2 4 6	0 0	-Cq
-7	6 0 0 6	0 0	
+ 3	7 5 1 4	0 0	*Divisor.*
5 4	0		4AcE
1 3	5 0		6AqEq
1	5 0 0		4AEc
	6 2 5		Eqq
+ 6 0	0 6 2 5		
3 7	3 8 0 0	0	-Cq2AE
3	1 1 5 0	0 0	-CqEq
-4 0	4 9 5 0	0 0	
+ 2 8	5 6 7 5	0 0	*Ablatit.*
R 3	4 6 9 7	6 2 5 6	
	8 4 8 9	1 8 0 0	*Divisor*

+ 3 4 6 9 7 6 2 5 6 *Ablatit.*

Exemplum VI.

$$1qq - 340c = 6210666096$$

$$Lqq - BLc = Fqq.$$

	6210666096	(354
	−340	−B
	+81	Aqq
	−9180	BAc
	−1080	Ablatit.
R	17010666096	
	108	4Ac
	54	6Aq
	12	4A
	+11352	
	9180	−B3Aq
	3060	−B3A
	340	−B
	−948940	
	+186260	Divisor.
	540	4AcE
	1350	6AqEq
	1500	4AEc
	625	Eqq
	+690625	
	45900	−B3AqE
	76500	−B3AEq
	42500	−BEc
	−5397500	
	+1508750	Ablatit.
R	192316096	
	+46929060	Divisor
	+192316096	Ablatit.

Exemplum VII.

1qq--77108000l=08553,0576 Lqq— Dc L=Eqq.

0	8553	0576	(426
--77	1080	00	--Dc
+256			Aqq
--208	4320	00	--DcA
--52	4320	00	*Ablatit.*
R 53	2873	0576	
25	6		4Ac
	96		6Aq
	16		4A
+26	576		
--77	7108	000	--Dc
+18	8652	000	*Divisor.*
51	2		4AcE
3	84		6ApEq
	128		4AE
	16		Eqq
+55	1696		
--15	4216	000	--DcE
+39	7480	000	*Ablatit.*
13	5393	0576	
+2	2030	4080	*Divisor.*
+23	5393	0576	*Ablatit.*

4 . 2
16
16
4
1764

4 . . 2
646 8
948
74088

Exemplum VIII.

32001 — 1c = 46577 Æquatio est tmbigua.

CqL — Lc = Dc.

46	577		(47	*Radix major.*
32	00	Cq		
-64		-Ac		
+128	00	CqA		
+64	00	*Ablatit.*		
R -17	423			
4	8	-3Aq		
	12	-3A		
-4	92			
+3	200	Cq		
-1	720	*Divisor.*		
33	6	-3Aq		
5	88	-3AEq		
	343	-Ec		
-39	823			
+2	400	CqE		
-17	423	*Ablatit.*		
R 0	0000			

Exemplum IX.

$3200l - 1c = 46577$

	46	577	Dc		(157 *Radix minor.*
	32	00	Cq		
	-1		Ac		
	+32	00	CqA		
	31	00	*Ablatit.*		
R	15	577			
		3	3Aq		
		3	3A		
	--3	3			
	+3	200	Cq		
	2	870	*Divisor.*		
	1	5	-3AqE		
		75	-3AEq		
		125	-Ec		
	--2	375			
	+16	000	CqE		
	13	625	*Ablatit.*		
R	19	52	000		
		252	05	*Divisor.*	
		745	107	*Ablatit.*	
R	1	206	895	000 &c.	

Exemplum X.

539q − 1c = 13254. Æquatio est
BLq − Lc = Dc ambigua.

Radix major.

1 3	2 5 4	(47
5	3	B
−6 4		−Ac
+8 4	8	BAq
+2 0	8	*Ablatit.*
R −7	5 4 6	
4	8	−3Aq
	1 2	−3A
−4	9 2	
4	2 4	B2A
	5 3	B
+4	2 9 3	
−	6 2 7	*Divisor.*
3 3	6	−3AqE
5	8 8	−3AEq
	3 4 3	−Ec
−3 2	8 2 3	
2 9	6 8	B2AE
2	5 9 7	BEq
+3 2	2 7 7	
−7	5 4 6	*Ablatit.*
R 0	0 0 0	

Exempl. XI

Exemplum XI.

$$53q - 1c = 13254$$

1 3	2 5 4	Dc (2005 *Radix minor.*		
		B		
5	3			
--8		-Ac		
1 2	2	BAq		
1 3	2	*Ablatit.*		
R	5 4	0 0 0	0 0 0	
	--1 2	0 0 0	0	--3Aq
		--6	0 0	--3A
	--1 2	0 0 6	0 0	
	2 1	2 0 0		B2A
		5	3	B
	+2 1	2 0 5	3	
	9	1 9 9	3 0	*Divisor.*
	--6 0	0 0 0	0	--3AqE
	--	1 5 0	0 0	--AEq
			1 2 5	--Ec
	--6 0	1 5 0	1 2 5	
	1 0 6	0 0 0		B2AE
		1 3 2	5	BEq
+	1 0 6	1 3 2	5	
	4 5	9 8 2	3 7 5	*Ablatit.*
R	8	0 1 7	6 2 5	0 0 0 &c.

Exempl. XII.

Exemplum XII.

600341 − 1c = 1023768

CqL − Lc = Dc.

1	023	768	(236	Radix major.
6	003	4	Cq	
−8			·Ac	
+12	006	8	CqA	
+4	006	8	*Ablatit.*	
R −2	983	032		
1	2		−3Aq	
	6		−3A	
−1	26			
+	600	34	Cq	
−	659	66	*Divisor.*	
3	6		−3AqE	
	54		−3AEq	
	27		−−Ec	
−4	167			
+1	801	02	CqE	
−2	365	98	*Ablatit*	
R−	617	052		
	−963	66	*Divisor*	
	617	052	*Ablatit.*	

Exempl. XIII.

Exemplum XIII.

600341-1c=1023768

(17.1369 Radix minor.

1023768

034 Cq

1 Ac

+ 60034 CqA

+ 59934 *Ablatit.*

R 44428

3 --3Aq

3 --3A

33

+60034 Cq

59704 *Divisor.*

21 --3AqE

147 --3AEq

343 --Ec

3913

+ 420238 CqE

+ 416325 *Ablatit.*

R +8103000

5916 19 *Divisor*

5616189 *Ablatit.*

R 2 186811000

591562 97 *Divisor.*

1774656903 *Ablatit.*

R 412154097000

59153037 91 *Divisor.*

854920285544 *Ablatit.*

R 5723281 1456000

5915306737 12 *Divisor.*

53237723619591 *Ablatit.*

R 3996087836409000 &c.

Exemplum XIV.

1qq -- 72c + 238600l ═ 87258157056.

Lqq -- BLc + DcL ═ Fqq.

8725815	7056	(476
-- 72	-- B	
+ 238600	Dc	
256	Aqq	
954400	DcA	
+ 1210400		
-- 4608	BAc	
+ 749600	*Ablatit.*	
R 1229815	7056	
256	4Ac	
96	6Aq	
16	4A	
238600	Dc	
+ 504360		
3456	-- B3Aq	
864	-- B3A	
72	-- B	
-- 354312		
+ 150048	*Divisor.*	
1792	4AcE	
4704	6AqEq	
5488	4AEc	
2401	Eqq	
1670200	DcE	
+ 3289881		
24192	-- B3AqE	
42336	-- B3AEq	
24696	-- BEc	
-- 2867256		
1122625	*Ablatit.*	
R 1071907056		
176988 08	*Divisor.*	
1071907056	*Ablatit.*	

Exemp. XV.

Exemplum XV. Trisectionis.

$3l - 1c = 1,258640782100$ CqL $-$ Lc $=$ Dc.

(0,4499
Subtensa
Gr. 26.

1	258	640	782	1	
	3	Cq			
	-64	-Ac			
+ 1	2	CqA			
1	136	*Ab*	*latit.*		
R	122	640			
	4	8	-3Aq		
		12	-3A		
	-4	92			
	+3		Cq		
	25	08	*Divi*	*sor.*	
	19	2	-3Aq	E	
	1	92	-3AE	q	
		64	-Ec		
	-21	184			
+	12		CqE		
	98	816	*Abla*	*tit.*	
R	23	824	782		
	2	417	88	*Divisor*	
	21	665	151	*Ablatit.*	
R	2	159	631	100	
		239	506	23	*Divisor.*
	2	154	585	501	*Ablatit.*
R		05	045	599	000

Exemplum XVI. Quinquisectionis.

1qc-5c+5l = 1|147152872702092

Lqc-CqLc+FqqL = Gqc.

(0|2437
Subtensa
Gr. 14.

	1	47 15	28727	02092
+		5	Fqq	
		-5	-Cq	
		32	Aqc	
	1	0	FqqA	
	+1	00032		
		-40	CqAc	
		96032	*Ablatit*	
R		18683	28727	
		8	0	5Aqq
			80	10Ac
			40	10Aq
			10	5A
		5		Fqq
		+5008	8410	
		60		-Cq3Aq
		30		-Cq3A
			5	-Cq
		-630	5	
		+4378	3410	*Divisor*
		32	0	5AqE
		12	80	10AEq
		2	560	10AqEc
			2560	5AEqq
			1024	Eqc
		20		FqqE
+		20039	62624	

	240		-Cq3 AqE	
	480		-Cq3 AEq	
	320		CqEc	
	-29120			
	17135	62624	*Ablatit.*	
R	1547	66103	02092	
	414	9122		*Divisor.*
	1242	64912	09443	*Ablatit.*
R	305	01120	92649	00000

Nota

Notæ in Exempla precedentia.

IN Exemplis Sectionum 26 & 28, Numerum Justum voco eum, qui oritur ex applicatione potestatis Resolvendæ ad gradum lateris suppositi, per quem facta est Depressio. Hæc enim mensura est, cui reliquæ species omnes legitimè aggregatæ, deberent esse æquales. Ut in Exemplo 10 Sectionis 26, 1c + 238|6 −7|2q=l) 872|5. Si pro latere primo supponatur 5: Oportet esse C: 5: + 238|6 −7|2Q:5: = 8725 divisum per 5: hoc est 125+238|6 −(7|2×25) 180, nempe 183|6 æqualem esse 174|5 Justo. At major est: ideoque latus verum minus est quàm 5. Supponatur igitur iterùm 4: Et periculum fac, an C:4:+238|6 7|2Q: 4: æquetur 872|5 diviso per 4.

Cæterùm nè in his Exemplis, sicut etiam in sequentibus, tentamenta hæc casu merè fortuito suscipiantur; Monendum erit.

Primò, si lateris eruti homogenea potestas excedat potestatem Resolvendam; vel, si magnitudines augentes potestatem Resolvendam, excedant eas quæ imminuunt: Latus A verum minus (ut plurimùm) erit latere eruto: Sin aliter, majus. Ut in hac Æquatione, 124260000l=180931713.

Secundò, Si Divisores sub eodem signo cum Reliquo potestatis Resolvendæ, excedant eos, qui sunt sub signo diverso: Latus E verum (ut plurimum) minus erit quam Quotus: sin aliter, majus: Ut in hac Æquatione,

tione, 15681 − 1c = 21952. Idem etiam accidit in Æquationibus ambiguis, quando Reliquum potestatis Resolvendæ est affirmativum: ut in hac Æquatione, 67681 − 1c = 214273. Harum trium Æquationum solutio in praxi, post Notas ostendetur.

Tertiò, Si post hæc Monita, nihilominus subsit dubitatio; tentamentum à 5 commodissimè erit inchoandum: Atque inde per numeros impares continuanda inquisitio: sive ea per Depressionem fiat, sive per Logarithmos.

His præmonitis, restat ut Exempla ipsa discutiamus.

Ad Exempl: I. √qc1703 est 4 +, per Sect: 18, Reg: 1. Nam ut ex Sect: 7. apparet, per Coëfficientes Analyticè reductos, non fit in primo puncto notabilis immutatio. Quare latus A verum erit 4.

Latus E verum minus est quàm Quotus 9: quia Divisores sub signo + (quod signum est ipsius Residui) excedunt eos qui sunt sub signo −.

Ad Exempl: II. 42) 247 (6 −, per Sect: 18, Reg: 2. Nam 42 Analyticè reductus, per Sect: 6 & 8, fit 252: major quàm 247. Estque Latus A verum minus quàm 6; quia C: 6 −: excedit 247|6.

Ad Exempl: III. 10) 247 (24 + = Q: 5 −: per Sect: 18, Reg: 2. At 10 Q: 5: = 250 ⊏ 247|6. monit: 1.

Ad Exempl: IV. √c44|3 est 3 +, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum est 3.

Latus E verum minus est quàm Quotus 8 −, per Monit: 2.

Ad Exempl: V. √q12|4 eſt 3 +, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 9-, per Monit: 2.

Ad Exemp: VI. Coëfficiens lateralis 3|4 Quadrato-quadraticè multiplicatus, & auctus 6|2, fit 140, QQ: 3+: per Sect: 18, Reg: 4. Quare latus A verum eſt 3.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 9 —, per Monit: 2.

Ad Exempl: VII. √c77 eſt 4, per Sect: 18, Reg: 3. Quare latus A verum eſt 4.

Ad Exempl: VIII. √q32 eſt 5|65, in 32 fit 180|8 mi 46|5, reſtat 144, C: 5: per Sect: 18, Reg: 4. At 144 excedit 46|5. Quare Latus A verum minus eſt quàm 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quam Quotus 10, per Monit: 2.

Ad Exempl: IX, XI, XIII. Solutio facillima eſt per Diviſionem, juxta Sect: 18, Reg: 3.

Ad Exempl: X. C: 5: eſt 125, mi 13, reſtat 112, C: 5 —: per Sect: 18, Reg: 4, At 112 excedit 13. Quare latus A verum minus eſt quam 5, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 12, per Monit: 2.

Ad Exempl: XII. √q6 eſt 2 +, in 6 fit 12, mi 1, reſtat 11, C: 2|5 per Sect: 18, Reg: 4. At 11 excedit 1. Quare latus A verum paulò minus quam 2 +, per Monit: 1.

Latus E verum minus eſt quàm Quotus 5-, per Monit: 2.

Ad

Ad Exempl: XIV. QQ: 7|2: est − 2687. Et √c238|6 est 6|2, cujus QQ est + 1480. Tum − 2687 + 1480 = − 1207: His additus ad 872, dat 2079, QQ:6 +: per Sect: 18, Reg: 4. Et quia adjectitius − 2687 major est quam ablatitius + 1480, erit latus A verum minus quàm 6, per Monit: 1.

Latus E verum minus est quam Quotus 9, per Monit: 2.

Ad Exempl: XV, XVI, Quia in utroque Æquationis ambiguæ Radix minor quæritur, nec obstant Coëfficientes etiam reducti, Analysis per Divisionem fiet, juxta Sect: 18, Reg: 1.

Praxis Exempli in Monito primo.

$1c + 26|0000 = 180931713.$

$180|9\ (4,$ latus A

$26|0$ Cq.

√q26 est 5, in 26 fit 130, tollatur ex 180, restat 50, C:3+: qui minor est quam 1 80. Quare latus A verum majus est quàm 3.

Praxis Exempli in Monito secundo.

$15681 - 1c = 21952.$

21	952	(28, Duo prima latera.
15	68	Cq
--8		Ac
+31	63	CqA
+23	36	*Ablat*
R - 1	408	
1	2	-3Aq
	6	-3A
- 1	26	
+ 1	568	Cq
+	308	*Divisor*

Signum R est-. At - 1|26 minor est quam + 1|568. Quare latus E verum majus est quam Quotus 4.

Praxis

Praxis Exempli posterioris in Monito secundo.

67681 - 1C = 214273

2 1 4	2 7 3	(47, Duo prima latera.
6 7	68	Cq
- 6 4		-Ac
+ 270	7 2	CqA
+ 206	7 2	*Ablat*
R + 7	5 5 3	
4	8	-3Aq
	1 2	-3A
--4	9 2	
+ 6	7 6 8	Cq
+ 1	8 4 8	*Divisor*

Signum R est +. At Divisor ex A lateris gradibus negativus, minor est Divisore Coëfficiente affirmativo; hoc est--4|92 minor est quam + 6|768. Quare latus E verum majus erit quam Quotus 4.

De Logarithmis.

In Sectione XXVII. *L*ogarithmorum doctrinam paucis tradidi: Sed satis luculentèr præsertim pro tribus prioribus Numerationis speciebus, scilicet Additione, Subductione, & Multiplicatione.

Operatio quidem in Addendo & Subtrahendo, si Indices sint affirmativi, à communi integrorum viâ nihil differt: parum etiam si sint negativi, ut ex his Exemplis apparet,

Inventio

Inventio fractionum $\left\{\begin{array}{l}\frac{13}{17}\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}13.\ 1,11394.\\ 17.\ 1,23045.\end{array}$ Et $\left\{\begin{array}{l}15.\ 1,17609\\ 32.\ 1,50515\end{array}\right.$

Log: $\bar{1},88349$ *Log*: $\bar{1},67194$

Additio. Subductio.

Ad	$\bar{1},88349$		Ex	$\bar{1},88349$
adde	$\bar{1},67194$		tolle	$\bar{1},67194$
Sum	$\bar{1},55543$		Rest	$0,21155$

Multiplicatio.

Lateris	0,0064		*Lateris*	0,0064
	$3 \times \bar{3},80614$			$2 \times \bar{3},80614$
Cubus	$\bar{7},41842$		Quadr:	$\bar{5},61228$

Divisionis *Logarithmi* Indicem habentis negativum, per 2, 3, 4, 5, &c. difficultas constat in investigatione Indicis Quoti. Cui rei hæc inservit Tabella.

Divisores.		
2)	$\bar{1}.\bar{2}$	$\bar{1}$
	$\bar{3}.\bar{4}$	$\bar{2}$
	$\bar{5}.\bar{6}$	$\bar{3}$
	$\bar{7}.\bar{8}$	$\bar{4}$
3)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}$	$\bar{1}$
	$\bar{4}.\bar{5}.\bar{6}$	$\bar{2}$
	$\bar{7}.\bar{8}.\bar{9}$	$\bar{3}$
4)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}.\bar{4}$	$\bar{1}$
	$\bar{5}.\bar{6}.\bar{7}.\bar{8}$	$\bar{2}$
5)	$\bar{1}.\bar{2}.\bar{3}.\bar{4}.\bar{5}$	$\bar{1}$
	$\bar{6}.\bar{7}.\bar{8}.\bar{9}.\bar{10}$	$\bar{2}$
&c	40.30.20.10.0	

In

In hac Tabella Divisores sunt à sinistrâ intra lineam flexam.

Tum versus dextram sequuntur *L*ogarithmorum dividendorum Indices negativi.

His in singulis ordinibus collaterales adstant Quotorum Indices etiam negativi.

Subtùs autem qui scribuntur numeri, 0, 10, 20, 30, 40, Ostendunt numeros addendos primæ figuræ *L*ogarithmi dividendi, cujus Index negativus invenitur supra in eâdem columnâ, juxta Divisorem. Ut si *L*ogarithmus $\bar{7}$, 41842 postuletur dividi per 3 : Quæratur $\bar{7}$ juxta 3) dabiturque collateralis $\bar{3}$, pro *I*ndice Quoti : Et numerus 20 subtùs ; qui additus figuræ dividuæ primæ 4, reddit ipsum 24 : in quo Divisor 3 octiès continetur.

Divisio.

3) $\bar{7}$, 4 1 8 4 2	2) $\bar{5}$, 6 1 2 2 8
*L*atus $\bar{3}$, 8 0 6 1 4	*L*atus, 3, 8 0 6 1 4

FINIS.

Notæ seu symbola quibus in sequentibus utor :

Æquale =. Simile *Sim*.
Majus ⊏. Proxime majus ⊏̶.
Minus ⊐. Proxime minus ⊐̶.
Non majus ⊏̸. Æquale vel minus ⊑.
Non minus ⊐̸. Æquale vel majus ⊒.
Proportio, sive ratio æqualis : :
Major ratio ∵. Minor ratio ∴.
Continuè proportionales ∷.
Commensurabilia ⊥⊔.
Incommensurabilia ⊤⊔.
Commensurabilia potentiâ ⊥⊓.
Incommensurabilia potentiâ ⊤⊓.
Rationale, ῥητὸν, R, vel ɼ.
Irrationale, ἄλογον, ɼ.
Medium sive mediale *m*ɼ.
Linea secta secundum extremam & mediam rationem } ς
Major ejus portio σ.
Minor ejus portio τ.
Z est A + E. ʒ est a + e.
X est A-E ẋ est a-e

Z est Aq+Eq. ℨ est aq+eq.
X est Aq-Eq. 𝔛 est aq-eq.
Æ est AE Erectang. æ est a e rectangulum.
▯ rectangulum. □ quadratum.
△ Triang. ℞ latus, sive radix.
𝔪 media proportionalis.

~ est differentia duarum magnitudinum, ut B ~ C significet vel B-C, vel C-B. in 113, 114 e 10.

ELEMENTI

ELEMENTI DECIMI EVCLIDIS
Declaratio.

AD def: 1. Eandem mensuram duas magnitudines metiri, tum dicit, quando ipsarum quoti mensuras certas, & veris numeris explicabiles habent. Commensurabiles igitur magnitudines sunt, quarum ratio in veris numeris dari poterit: quales sunt in genere quadratico, radices quadratæ planorum similium: & in genere cubico, radices cubicæ solidorum similium. Exempli gratiâ, in planis 18 & 50, nempe $3*6$, & $5*10$, similibus (est enim $3.6::5.10$) $\sqrt{q}\,18$, & $\sqrt{q}\,50$ sunt latera cõmensurabilia; quia divisa per $\sqrt{q}\,2$ maximam eorum communem mensuram, dant $\sqrt{q}\,9$ & $\sqrt{q}\,25$, hoc est 3 & 5. Sunt igitur $\sqrt{q}\,18$ & $\sqrt{q}\,50$ in ratione 3 ad 5. Quippe 18 & 50 sunt ut Q. Q.

Ad def: 2. $\sqrt{q}\,12$ & $\sqrt{q}\,64$ sunt latera incommensurabilia: nam quamvis ad minores terminos poterint reduci per $\sqrt{q}\,4$ maximam eorum communem mensuram; fientque $\sqrt{q}\,3$ & $\sqrt{q}\,16$: non tamen

men dicuntur commenſurabilia; quia non ſunt ut numerus ad numerum. Eſt enim $\surd$ q 3 numerus non verus, ſed ſurdus. Quippe 12 & 64 non ſunt ut Q. Q.

Ad def: 3. At vero linearum ſive laterum $\surd$ q 12 & $\surd$ q 64, quadrata 12 & 64 ſunt commenſurabilia; quia area 1 utrumque metitur: nam area 12, aream 1 continet duodecies; & area 64, ipſam aream 1, continet ſexagies & quater. Quare quadrata illorum laterum ſunt in ratione 12 ad 64. Atque hinc ſequitur, quod omne latus ſurdum generis quadratici numero rationali, ſive vero cuicunque, potentiâ eſt commenſurabile: modo ſi intelligantur ejuſdem eſſe generis ſive dimenſionis: At ſi unum ex iis intelligatur eſſe latus ſive linea, & alterum planum ſive ſuperficies, non erunt commenſurabilia potentiâ.

Ad def: 4. Sunt igitur lineæ potentiâ incommenſurabiles diverſorum generum: nempe una lateralis, altera quadratica; vel una quedratica, altera quadratoquadratica. Exempli gratia, laterum $\surd$ q 3 & $\surd$ q 2 quadrata ſunt 3 & 2: & inter ipſa planum medium proportionale $\surd$ q 6. Quare plana ſive potentiæ 3 & 2 incommenſurabilia ſunt ad planum $\surd$q6. Ideoque ipſorum latera $\surd$q3 & $\surd$q 2 ad $\surd$qq6 ſunt incommenſurabilia etiam potentiâ.

$\surd$q3. $\surd$q2.
3. $\surd$q6. 2.
$\surd$q3. $\surd$qq6. $\surd$q2.

Atque hujuſmodi media proportionalia tum plana, tum latera, Euclides poſtea media ſive Medialia nuncupat.

Ad def: 5. Si linea propoſita vero numero ſit explicabilis; omnes lineæ veris numeris explicabiles ſunt

ſunt ipſi commenſurabiles. Si verò linea propoſita ſit latus ſurdum, puta $\sqrt{q}3$, linea illi quacunque ratione commenſurabilis invenitur per proportionem. Ut ſi ratio data ſit 2 ad 5: Dic 2. 5 :: $\sqrt{q}3$. $\sqrt{q}\frac{75}{4}$.

Dicitur ῥητὴ, ſive rationalis, linea vero numero explicabilis; ratione cujus aliæ lineæ ad ipſam comparatæ, conſiderantur vel commenſurabiles vel incommenſurabiles, idque longitudine vel potentiâ.

Atque his bene perſpectis, reliquæ definitiones nihil habebunt difficultatis.

Sequuntur Lemmata.

1. Rectangulum ſub ꭉr & ſꭉr eſt ſꭉr. Nam irrationalium aggregatio quantacunque non mutat ſpeciem.

2. Si linea *Z* ſecetur inæqualiter in A & E, erit Z-2AE = Xq. Et Z+2AE = Zq.

3. Si linea *Z* componatur tum ex A+E, tum ex a+e: erit Z- = 26-2Æ. Nam Z+Æ = ʒ+9æ.

Item, ſi linea X conſtituatur tum ex A-E, tum ex a-e: erit Z-ʒ = 2Æ-2æ Nam Z+2Æ = ʒ-2æ.

4. A.E::Aq. Æ::Æ. Eq.

5. Si A & E ſint ⌐Ꭻ: erunt 1°, Aq, Eq, Z, X ⌐□: ideoque ſimul ꭉr vel mꭉr.

Erunt 2°, Aq, Eq, Z, X ⌐□ 2Æ. per 4.

Erunt 3°, Z, 2Æ, Zq, Xq ⌐□

Erunt 4°, X, 2Æ, Zq, Xq ⌐□. Nam Zq = Z+2Æ: & Xq = Z--2Æ. & Zq = 4Æ+Xq.

6. Si A & E ⌐Ꭻ, erunt Aq, Eq, Zq, Æ, Z, X, Xq⌐Ꭻ.

Propositiones Elementi X.

9. Novem priores propositiones docent lineas commensurabiles esse, ut numerus ad numerum, atque ideo eorum quadrata esse, ut quadratus numerus ad quadratum numerum. In incommensurabilibus autem contra esse. Earum enim quadrata non sunt ut Q.Q. √q45 & √q20 sunt lineæ commensurabiles, quia ipsarum quadrata 45 & 20 sunt ut 9 & 4, numeri quadrati, quorum radices sunt 3 & 2, sunt igitur √q45 & √q20 in ratione 3 ad 2.

Coroll: ad 9. Lineæ ⊓ sunt eitam Ʒ at non contra. Sed lineæ '⊓ non sunt idcirco 'Ʒ. :

10. Si sit B.C::D.F. sintque B, C ⊓ vel '⊓: etiam D, F ⊓ vel '⊓ erunt.

12. 14. Si B. ⊓ C, & C, D ⊓ vel '⊓, etiam B, D ⊓ vel '⊓ erunt.

13. Si B⊓D; & C'⊓D: erit B'⊓C.

Coroll: ad 14. Si B '⊓C; at B ⊓ D, & C ⊓ F: erit D'⊓F.

16. 17. A, E, Z sunt simul ⊓ vel '⊓.

11. Invenire B, D '⊓: & B, C'Ʒ. Sumantur duo aliqui numeri 3 & 2, qui non sint ut Q.Q. fiatque 3.2::B.F: Item B.D::B.D.F. Quare B.F::Bq. Dq. At B, F non sunt Q.Q: ideoque nec Bq.Dq. sunt ut Q.Q. Ergo B, D '⊓ per 9.

Iterum fiat B.C::C.D: sunt igitur Bq, Cq'⊓: quare B, C'Ʒ. √q3. √qq 6. √q2.

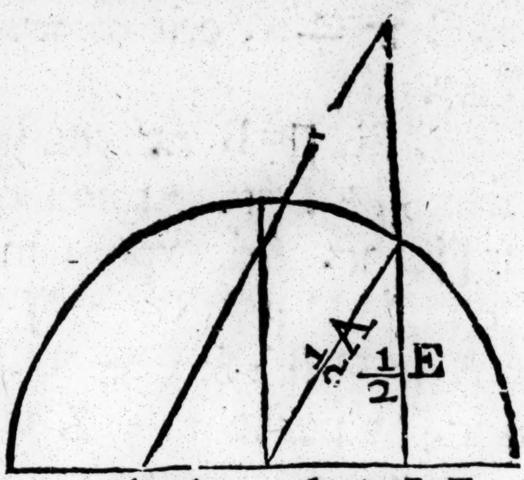
Coroll: ad 11. m inter duas '⊓, est utrivis ipsarum 'Ʒ; & 'r, si alterutra ex iis sit 'r.

15. Si sit A, E::a. e. & sit A ⊓ √q: Aq-Eq; scil,

X:

X: erit etiam a ⊐⊏ √q: aq-eq: scil ☋. Nam Aq. Eq::aq. eq: quare Aq. Aq-Eq::aq.aq-eq. Ergo per 10.

18. 19. Si sint duæ lineæ A & E: adplicetur autem ad A rectangulum æquale quadrato semissis E, deficiens figura quadrata: hoc est, dividatur A in duas partes A-I & I, sic ut ▯m segmentorum æquetur □o ½ E, nempe AI-Iq=¼Eq. & sint segmenta A-I & I ⊐⊏. Erit etiã A ⊐⊏ √q:Aq-Eq. & conversè: & contra. Nã per 47 e 1, ¼ Aq-¼Eq=Q: ½A-I: quare √q:Aq-Eq: est A-2I. At per 16 & hypoth. A-2I, & A sunt ⊐⊏.



22. 23. Ex A, E ℟ ⊐⊏ fit Æ ℟, scil. ṁ: & √q Æ, est ℟ & ṁ, (vide annotata ad def. 4.) Nam A. E :: Aq. Æ. quare Æ ⊐⊏ Aq ℟, erit ℟. Est etiam Æ ṁ. Nam si A sit √q3, & E √q2; erit Æ √q6 planum, cujus radix est √qq6. At vero tum quadrata 3, √q6, 2; tum ipsorum radices √q3, √qq6, √q2. sunt ∺ & in neutris medius terminus est ejusdem rationis sive commensurationis cum suis extremis, sed utrique incommensurabilis.

24. Si B sit ⊐⊏ saltem ipsi C ṁ, erit etiam B ṁ. Nam ad expositam R per 23, fiat RD=Cq ṁ, & RF=Bq. Quare RD ⊐⊏ RF: ideoque F, D ℟ ⊐⊏. Est autem per 23. R ⊐⊏ D: idcirco etiam R ⊐⊏ F. Ergo Bq ṁ: atque ipsa B ṁ.

20. 21. 25. Ex A, E ℟ ⊐⊏, fit Æ similiter ℟: & conversè

versè. Et ex A, E μ ⊐, fit Æ μ: & conversè. Nam A.E::Aq. Æ. At Aq est ῥ vel μ. ergo & Æ similiter ῥ vel μ, per 24.

26. Ex A, E μ ⊐̲, fit Æ ῥ vel μ. Nam ad expositam R, fiat RB = Aq: & RC = Æ: & RD = Eq. Sunt igitur B, D, ῥ ⊐, per 23. Et quia C est m∸ inter B & D erit Cq ῥ ideoque & ipsa C ῥ. Si igitur C ῥ ⊐ R, erit Æ ῥ. Si vero C ῥ ⊐ R, erit & Æ μ.

27. Si ▯^{m}B μ constet ex ▯^{o} C μ, ▯D: erit etiam ▯^{m} D ῥ. At non conversè. Nam aliter fingatur ▯D ῥ. Ad expositam R fiat RA = ▯^{m}C μ; & RE = ▯^{m}D; & RZ = ▯B μ. Erit igitur Z ῥ ⊐ R: & A ῥ ⊐ R: & E ῥ ⊐ R. Quare A, E ῥ ⊐. Estque Z ῥ. At per lem: 5. Z ⊐ Zq. Est igitur Zq ῥ, & Z ῥ: quod ostensum est falsum. Ergo.

28. Invenire duas A, E μ ⊐̲, ita ut Æ sit ῥ. Sumantur B, C ῥ ⊐̲: fiatque B. A::A.C::C.E. Dico I^o, A, E μ: Nam Aq = BC μ, per 22. estque B.C:: A.E. Dico II^o A, E μ ⊐̲: Nam B. C::A. E. Quare per 24. Dico III^o Æ ῥ: Nam AE = Cq ῥ.

29. Invenire duas A, E μ ⊐̲, ita ut Æ sit μ. Sumantur B, C, D ῥ ⊐̲: fiatque B.E::D::A.C. Dico I^o, A, E μ: Nam Eq = BD μ. Dico II^o, A, E μ ⊐̲: Nam D.C::E.A. Dico III^o, Æ μ: Nam AE = BC μ.

Exemplum pro 28. B2. C√q3. A√qq 12. E√qq$\frac{27}{4}$. AE 3.

Exemplum pro 29. B√q5. C2. D√q3. E√qq15. A√qq$\frac{80}{3}$. AE √ 20.

30. Invenire duas A, E ῥ ⊐̲, ita ut A ⊐ sit √qX. Suman-

Sumantur duo numeri quadrati aq, eq; ita ut aq-eq non sit Q. Tum exposità A ɼ, fiat aq. aq-eq:: Aq-Eq. Erit igitur etiam aq. eq:: Aq.X., per 19 e 5.

Dico I°, A, E ɼ ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q.Q.

Dico II°, A ⊏⊐ √ qX.: Nam sunt ut Q.Q.

Exemplum pro 30. Aq & aq sunt 9. eq & X. 4.

31. Invenire duas A, E ɼ ⊐, ita ut A ⊏⊐ √ qX.. Sumantur duo numeri aq, eq, quadrati, ita ut aq+eq non sit Q. Tum exposita A ɼ, fiat aq+eq.aq:: Aq. Eq. Erit igitur aq+eq.eq:: Aq X., per 19 e 5.

Dico I°, A, E ɼ ⊐: Nam Aq, Eq non sunt ut Q. Q.

Dico II°, A ⊏⊐ √qX.: Nam Aq, X. non sunt ut Q.Q.

Exemplum pro 31 aq & eq 4. eq & X. 1.

32. Invenire duas A, E mr ⊐, ita ut Æ sit ɼ; & A ⊏⊐ √qX.. Sumantur per 30, duæ a, e ɼ ⊐, ita ut a ⊏⊐ √q: aq-eq. fiatque a. A:: A. e:: e. E. Dico I°, A, E mr ⊐, per 22 & 24. Nam Aq=ae mr: & a.e:: A. E, ⊐. Dico II°, Æ ɼ: Nam AE=eq ɼ. Dico III°, A ⊏⊐ √qX., per 15. Nam a ⊏⊐ √q: aq-eq. Exemplum a 2. e √q 3. A √qq 12. E √qq $\frac{27}{4}$.

Quod si per 31, Sumerentur a, e ɼ ⊐; ita ut a ⊏⊐ √q: aq-eq: Inventæ fuerint A, E mr ⊐, ita ut Æ sit ɼ, & A ⊏⊐ √qX..

Exemplum a √q 5. e 2. A √q 20. E √q $\frac{64}{5}$.

33. Invenire duas A, E mr ⊐, ita ut Æ sit mr; & A ⊏⊐ √qX.. Sumantur per 30, duæ a, e ɼ ⊐; ita ut a ⊏⊐ sit √ q: aq-eq: & sumatur i ɼ ⊐ utrique a, e: fiatque a. A:: A. i:: e. E. Dico I°, A, E mr ⊐: Nam Aq=a i mr: Estque a. e:: A. E. Dico II° Æ mr. Nam AE=ie mr. Dico III°, A ⊏⊐ √qX.: Nam a ⊏⊐ √q: aq-eq: quare per 15.

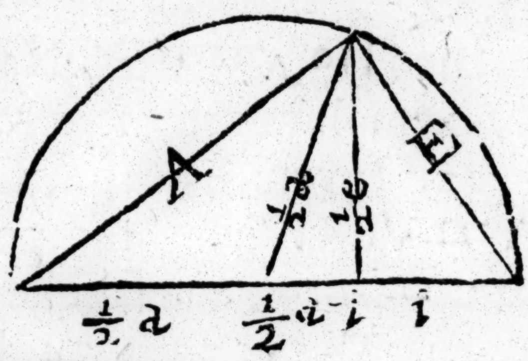
Exem-

Exemplum a 2. e √q 5. i √q 2. A √qq 8. E √qq $\frac{8}{2}$.
Quod si per 31, sumerentur a, e ɤ ꟻ, ita ut a ⊐ √q: aq-eq: *I*nventæ fuerint A, E mr ꟻ, ita ut Æ sit mr: & A ⊐ √qX.

Exemplum, a √q 5. e 2. A √qq 20. E √qq $\frac{16}{5}$.

Præparatio ad propositiones 34, 35, 36, demonstrandas in tribus lemmatibus.

Lemma primum. Si ad a adplicetur rectangulum æquale Q. $\frac{1}{2}$e, deficiens figura quadratâ: divisâ scil. a in a-i & i; ita ut a-i. $\frac{1}{2}$e :: $\frac{1}{2}$e. i. Erit $\frac{1}{2}$ a-i = √u: $\frac{1}{4}$ aq. $\frac{1}{4}$eq: sicut in schemate apparet, Atq; per hanc interpretationē, a-i = $\frac{1}{2}$ a + √u: $\frac{1}{4}$ aq. $\frac{1}{4}$ eq. & i = $\frac{1}{2}$ a - √u: $\frac{1}{4}$ aq - $\frac{1}{4}$ eq. Et quia Aq = Q: a. i. + $\frac{1}{4}$eq. & Eq = iq + $\frac{1}{4}$ eq. Nempe Q. $\frac{1}{2}$ a ± √u: $\frac{1}{4}$ aq - $\frac{1}{4}$ eq: + $\frac{1}{4}$ eq. Hac adhibita interpretatione



Erit A = √u: $\frac{1}{2}$ aq + √u: $\frac{1}{4}$ aqq - $\frac{1}{4}$ aqeq.

Et E = √u: $\frac{1}{2}$ aq -- √u: $\frac{1}{4}$ aqq -- $\frac{1}{4}$ aqeq.

Nam in quadratione lineæ $\frac{1}{2}$ a ± √u: $\frac{1}{4}$ aq - $\frac{1}{4}$ eq. Z est $\frac{1}{4}$ aq + $\frac{1}{4}$ aq -- $\frac{1}{4}$ eq. Et Æ est √u: $\frac{1}{16}$ aqq - $\frac{1}{16}$ aqeq: quod duplicatum fiet √u: $\frac{1}{4}$ aqq - $\frac{1}{4}$ aqeq. huic si adjungatur + $\frac{1}{4}$ eq; abolebitur alterum - $\frac{1}{4}$ eq.

Lemma secundum: a--i : i :: Aq. Eq, ⊐.

Nam a. A :: A. a--i } Quare { a. a--i :: aq. Aq.
Et a. E :: E. i } Quare { a. i :: aq. Eq.

Lemma tertium: a. A :: E. $\frac{1}{2}$e.

34. *I*nvenire duas A, E ꟻ, ita ut Z sit ɤ, & Æ mr.
Sumantur per 31, a, e ɤ ꟻ, ita ut a ⊐ √q: aq-eq:

& ex ipsis inveniantur A,E, Sicut in *Lem. pri.*

Dico 1o A,E ʒ : Nam per *Lem. sec.* Aq, Eq ⊓.

Dico 11o Z ɤ: Nam in 31, A,E (quibus hic respondent a,e) sunt ɤ ʒ.

Dico 111o, Æ mr. Nam per *Lem. tert.* AE $=\frac{1}{2}$ a e mr.

35. Invenire duas A,E ʒ, ita ut Z sit mr, & Æ ɤ. Sumantur per 32, a,e mr ʒ, ita ut æ sit ɤ, & a ⊓ √q: aq-eq: Et ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *lem. pri.*

Dico 1o A,E ʒ, per *Lem. secun.*

Dico 11o, Z mr, per 32.

Dico 111o, Æ ɤ: Nam per *lem. tert.* AE $=\frac{1}{2}$ a e. ɤ.

36. *I*nvenire duas A,E ʒ, ita in Z & Æ sint mr. Sumantur per 33, a,e mr ʒ, ita ut æ mr, & a ⊓ √q-aq--eq. & ex ipsis inveniantur A, E, sicut in *Lem. pri.*

Dico Io, A,E ʒ, per *lem. sec.*

Dico IIo Z mr, per 32.

Dico IIIo, Æ ɤ : per *lem. tert.* Consulatur etiam Schema pro hisce tribus propositionibus.

Coroll: ad 36: Hinc inveniri possunt duæ lineæ mr ʒ, scil. √qZ, & √qÆ.

Principium Senariorum per Compositionem.

37. Si sumantur a, e ɤ ʒ ; tota a + e hoc est ȝ, erit ɤ ; vocaturque *Binomium*, scil. A *Bin. I.* Nam per lemma 5, ȝq ⊓ ȝ ɤ.

2+√q3. Cujus Q: est 7 + √ q48.

38. Si sumantur a, e mr ʒ (per 28) ita ut æ sit ɤ,

tota

tota ʒ erit ɥr; vocaturque *Bimedale* prius, scil: ♃ *Bin*: II. Nam per lemma 5, ʒq ⊓ æ ɥr.

$\sqrt{qq}\,12 + \sqrt{qq}\,\frac{27}{4}$. Cujus Q: est $\sqrt{q}\,\frac{147}{4} + 6$.

39. Si (per 29) summantur a, e mr ⊓, ita ut æ sit mr: tota ʒ erit ɥr; vocaturque *Bimediale* posterius, scil: ♃ *Bin*: III. Nam ʒq, hoc est ʒ + 2 æ, est ɥr. Nam exposita R, fiat RT = ʒq; & RP = ʒ mr, per 16 & 24: Erit RT-RP = 2æ. Sunt autem per lem: 5, RP & RT-RP mr ⊓, Quare P, T-P ɥr ⊓ ad R. Et per 37, T est ɥr. Et per lem: 1, RT hoc est ʒ q ɥr.

$\sqrt{qq}\,\frac{80}{3} + \sqrt{qq}\,15$. Cujus Q: est $\sqrt{q}\,\frac{245}{3} + \sqrt{q}\,80$.

40. Si (per 34) sumantur a, e ⊓ ita ut ʒ sit ɥr, & æ mr; tota ʒ erit ɥr; vocaturque Major, scil: ♃ *Bin*: IV. Nam per lem: 6, ʒq ⊓ ʒ ɥr. $\sqrt{u}: \frac{5}{2} + \sqrt{q}\,\frac{5}{4}$. pl: $\sqrt{u}: \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$. Q. est $5 + \sqrt{q}\,20$.

41. Si (per 35) sumantur a, e ⊓, ita ut ʒ, sit mr, & æ ɥr; tota ʒ erit ɥr, vocaturque *Potens rationale & mediale*, scil. ♃ *Bin*: V. Nam per lem. 6, ʒq ⊓ æ ɥr.

$\sqrt{u}: \sqrt{q}5 + 1$:pl: $\sqrt{u}: \sqrt{q}5 - 1$. Q. est $\sqrt{q}\,20 + 4$.

42. Si (per 36) a, e ⊓, ita ut ʒ & æ sint mr ⊓; tota ʒ erit ɥr, vocaturque *Potens duo medialia*. Scil. ♃ *Bin*. VI. Nam ʒq, hoc est ʒ + 2 æ est ɥr. Exposita enim R, fiant RT = ʒq, & RP = ʒ. erit RT-RP. = 2æ. Sunt autem RT. & RT-RP mr ⊓ Quare per 22, P, T-P ɥr ⊓ ad R. Et per 37 T est ɥr. Et per lem. 1, RT hoc est ʒq ɥr. Ergo ʒ ɥr.

$\sqrt{u}: \sqrt{q}5 + \sqrt{q}3$:pl: $\sqrt{u}: \sqrt{q}5 - \sqrt{q}3$. Q. est $\sqrt{q}\,20 + \sqrt{q}\,8$.

43.44.45.46.47.48 Neque ulla ex dictis sex lineis ɥr, ʒ potest dividi in sua nomina a, e, præterquam in uno eodemque puncto. Nam aliter dividatur iterum ʒ in sua nomina A, E. Erit (per lem. 3) Z - ʒ = 2æ - 2Æ.

2Æ. At (per 37 & 40) in ℨ *Bin*. I, IV. Z-ζ eſt 𝔯; & 2 æ-2Æ 𝔪, per 27. Et (per 38 & 41) in ℨ *Bin*. II, V, Z-ζ eſt 𝔪; & 2æ-2Æ 𝔯. Quare eadem quantitas erit 𝔯 & 𝔯 Quod eſt abſurdum. In ℨ vero *Bin*. III, VI, Quoniam in 39 & 42, ſi ſupponatur 𝔯 ζ dividi in a, e; fiatque RT = ζq, & RP = ζ, & RT-RP = 2æ; demonſtratum eſt 𝔯 T dividi in nomina P, T-P 𝔯 ⊐. Item ſi iterum ſupponatur 𝔯 ζ dividi in A, E, alia nomina; fiatque RT = ζq, & RS = Z & RT-RS = 2Æ; ſimiliter demonſtrabitur 𝔯 T. dividi iterum in nomina S. & T-S 𝔯 ⊐, diverſa ab iis P & T-P. quod eſt contra priorem partem hujus demonſtrationis. Eſt enim 𝔯 T *Binomium*.

	Definitiones	&	Proprietates	
	ℨ *Binom. & Apotom.*		*Binomiorum & Apotom.*	
I	a, e 𝔯 ᵹ : æ 𝔪		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	𝔯 ⊐
II	a, e 𝔪 ᵹ : æ 𝔯		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
III	a, e 𝔪 ᵹ : æ 𝔪		A ⊐ √qX.. A, E ⊐ R	
IV	a, e ᵹ : ζ 𝔯 : æ 𝔪		A ⊐ √qX.. A ⊐ R	A.E
V	a, e ᵹ : ζ 𝔪 : æ 𝔯		A ⊐ √qX.. E ⊐ R	
VI	a, e ᵹ : ζ & æ 𝔪 ⊐		A ⊐ √qX.. A, E ⊐ R	

49, 50, 51, 52, 53, 54. Invenire ſex *Binomia* A+E. Sumatur N 9 & dividatur tum in 5 & 4 tum in 6 & 3: & exponatur R. 9 4 ſcil: numeri quadrati.

Pro *Bin*. I. IV. Sit A ⊐ R; fiatque 9. $\frac{5}{4}$ :: Aq. Eq

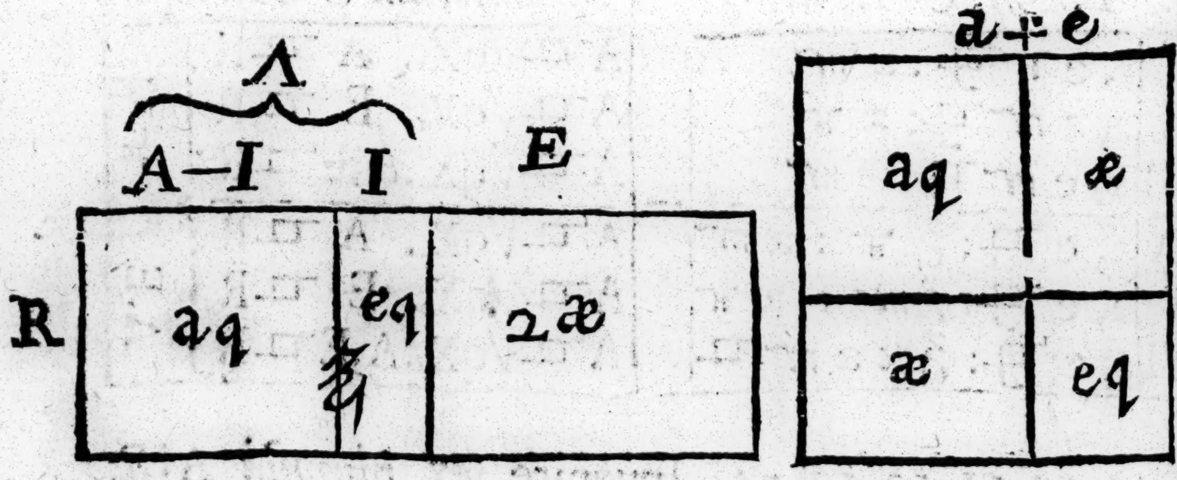
Pro *Bin*. II. V. Sit E ⊐ R; fiatque $\frac{5}{6}$. 6 :: Eq. Aq.

Pro *Bin*. III. VI. Sumatur tertius N 2, qui nec

ad

ad 9, nec ad 5, nec ad 6, ut Q.Q. fiatque 2. $\boxed{9}$ :: Rq. Aq ꝛ. Deinde $\boxed{9}$. $\frac{5}{6}$ :: Aq. Eq: qui non sunt ut Q.Q. Quare in omnibus sex sunt Aq, Eq, ꝛ ⊓; & A, E ꝛ ⊓̣. Item quia 9-5=4; & 9-6=3, erit $\boxed{9}$. $\frac{4}{3}$ :: Aq. X.: ideoque A, √X. ⊓, ⊓̣.

55.56.57.58.59.60. Si singula sex *Binomia* A+E ducantur in expositum R, √q: AR+ER: constituet ordine singulas species 2æ *Binom.* Nam (consideratis prius intentè proprietatibus cujusque tum *Binomii*, tum 2æ *Bin.* in tabella præmissa) dividatur A in A-I & I, ita ut AI-Iq=$\frac{1}{4}$ Eq. Erit igitur A-I. $\frac{1}{2}$ E:: $\frac{1}{2}$ E. I. fiat etiam aq=AR-IR: & eq=IR.



Probatur 1°, a + e esse √q: AR+ER. Est enim AR-IR. $\frac{1}{2}$ ER :: $\frac{1}{2}$ ER. IR: Item aq.æ::æ.eq. Quare $\frac{1}{2}$.ER=æ. Ergo Q. a + e: =AR + ER.

Probatur 2°, In tribus prioribus *Binom.* a, e, esse ⊓̣. Nam quia (per 18) AR-IR ⊓̣ IR, erit AR-IR ⊓̣

⊏⊐ AR: at (per *lem.* 5.) AR ⊐⊢ ER: ergo AR-IR ⊐⊢ ER: hoc est aq ⊐⊢ æ: est autem aq. æ::a.e.

In tribus posterioribus *Binom*: a, e esse ⊐⊢. Nam (per 19) AR-IR, IR, hoc est aq, eq ⊏⊐.

Probatur III°, In *Binom*: I. a, e esse ɤ. Nam AR-IR, IR, hoc est aq, eq ⊏⊐ sunt AR ɤ.

In *Bin*: II, a, e esse mr: Nam quia A-I, I ⊏⊐ A ⊐⊢ R; Erit AR-IR, IR, hoc est aq, eq mr: at a, e ⊐⊢. Item æ esse ɤ: Nam 2æ=ER ɤ.

In *Bin*: III, a, e esse mr, ut ante. Item æ esse ɤ: Nam ER, hoc est 2æ, mr, quia E ɤ ⊏⊐ R.

In *Bin*: IV. aq+eq, hoc est AR, esse ɤ. Nam A ɤ ⊏⊐ R. Item 2æ, hoc est ER, esse mr: ut ante.

In *Bin*: V. aq+eq, hoc est AR, esse mr. Nam A ɤ ⊐⊢. Item 2æ, hoc est ER, esse ɤ. Nam E ɤ ⊏⊐ R.

In *Bin*: VI, aq+eq, hoc est AR; Item 2æ, hoc est ER, esse mr. Nam A, E ɤ ⊏⊐ R.

Atque in omnibus his tribus posterioribus liquet a & e esse ⊐⊢, quia aq, eq ⊏⊐.

Consect: Latus quadratum singulorum *Binomiorum* A+E constituet ordine singulas species 2æ *Bin*: a+e. Nam posita R. esse 1, nihil per multiplicationem immutabitur. Unde majus quadratum erit A-I cujus latus est a: & minus I, cujus latus est e. Ostensum autem est ad prop. 34, in lem. pri: A-I esse $\frac{1}{2}$A+√u:$\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Et I esse $\frac{1}{2}$A-√u:$\frac{1}{4}$Aq-$\frac{1}{4}$Eq. Atque hinc patet Analysis *Binomii*: cujus hæc est regula.

Si è quadrato semissis nominis majoris tollatur quadratum semissis nominis minoris: & latus quadratum excessus semissi nominis majoris addatur,

dabit quadratum majus: sin detrahitur, minus.

Si igitur semis nominis majoris, & latus quadratum excessus, sint commensurabiles, ♃ *Bin*: erit bimembre. Si incommensurabiles, quadrimembre.

61. 62. 63. 64. 65. 66. Si quadratum ex ɤ a+e, ♃ *Bin*: aliqua, ad expositam R applicetur; latitudinem facit A+E, idem *Binomium*. Nam (sicut in Schemate ad 55) fiat AR+ER=Q: a+e: Et AR-IR=aq. Et IR=eq: ideoque ER=2ae. Probatur 1°.

In tribus prioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e ⊓̸; quare AR-IR, IR ⊓. Ergo per 18.

In tribus posterioribus *Binomiis*, A esse ⊓ √qX: Nam a, e sunt ⊓: quare AR-IR, IR ⊓. Ergo.

Probatur II°, A, E esse ɤ ⊓̸, &c. Nam in *Bin*: I. A est ɤ ⊓ R; & E ɤ ⊓ R: est enim AR, hoc est aq+eq ɤ. & ER, hoc est 2ae ⊓ aq+eq, per lem. 5.

In *Bin*: II, E est ɤ ⊓ R: & A ɤ ⊓ R. Est enim ER, hoc est 2ae ɤ: Et AR, hoc est, aq+eq, ⊓ ae, per lem. 5.

In *Bin*: III, A & E sunt ɤ ⊓ R: Est enim AR, hoc est ʒ: & ER, hoc est, 2ae, mr.

In *Bin*: IV, A est ɤ ⊓ R: & E ɤ ⊓ R: est etiam AR, hoc est ʒ, ɤ; & ER, hoc est, 2ae, mr. Et

In *Bin*: V. VI, similiter ex proprietatibus eorum poterit argui.

67. Si *Binomio* alicui A+E ⊓ sit E+C; Erit etiam *Binomium* ordine idem. Nam fiat A+E. B+C :: A.B :: E.C, ⊓, & quia A, E, ɤ ⊓̸, etiam B, C ɤ ⊓̸. per 14. & 16. Item per 15, Si A, √q: Aq-Eq ⊓ sit vel ⊓̸: Erit etiam B, √q: Bq-Cq: ⊓ vel ⊓̸.

68. Si

68. Si in ℨ *Bin*: II. III, a+e ⊓⊔ b+c: Erit *Bimediale* ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b.::e.c, ⊓⊔. Sunt autem a, e mr ℸ: Ergo b, c, mr ℸ per 24. Item a. c::aq. æ. Et b.c::bq.bc: quare aq.bq::æ.bc, ⊓⊔. Ergo si æ ϰ sit vel mr; Etiam bc ϰ vel mr erit.

69. 70. 71. Si in tribus posterioribus ℨ *Bin*: a+e ℸ b+c: Erit ℨ *Bin*: ordine idem. Nam fiat a+e. b+c::a.b::e.c, ℸ saltem. Sunt autem a, e ℸ. Ergo b, c ℸ. Item quia aq. bq :: eq. cq:: aq+eq. bq+cq, ℸ saltem: Si aq+eq ϰ vel mr; etiam bq+cq. erit ϰ vel mr. Denique quia aq.æ::a.e::b. c::bq.bc; erit aq.bq::æ.bc, ℸ saltem: Si æ ϰ sit vel mr; etiam bc ϰ vel mr erit.

72. 73. Si duo spacia ζ & 2æ componantur, quorum unum est ϰ, & alterum mediale; sitque ϰ majus; recta totum spacium potens erit ℨ *Bin*: I. vel IV. Sin mr majus; recta totum spacium potens erit ℨ *Bin*: II, vel V. Si vero duo spacia mr ℸ componantur: recta totum spacium potens erit ℨ *Bin*: III, vel VI. Nam si ad expositam R adplicetur AR+ER = ζ + 2æ, conjunctim & seorsim, nempe AR = ζ: & ER = 2æ; sive unum ex ipsis sit ϰ, & alterum mr: sive utrumque mr ⊓⊔. Clarum erit AR, ER esse ⊓⊔; ideoque A, E, ϰ ℸ. Quare si A ⊓⊔ √qX, erit A+E unum ex tribus prioribus *Binomiis*. Si verò A ⊓⊔ √qX, erit A+E unum ex tribus posterioribus *Binomiis*. Quodcunque autem ex ipsis sex fuerit; latus illius (quod etiam est √u:ζ+2æ:) erit ℨ *Bin*: ordine idem. per 55. 56. 57. 58. 59. 60.

Principium Senariorum per detractionem.

74, 75, 76, 77, 78, 79. Si ab à majore nomine cujusvis 2ꝭ *Bin*: auferatur è nomen minus. Reliquum a-e erit ꝟ, 2ꝭ *Apotome* ejusdem ordinis: vocaturque *vel Apotome, vel Residuum mediale primum, vel Residuum mediale secundum, vel Minor, vel Cum rotionali totum mediale faciens, vel Cum mediali totum mediale faciens.*

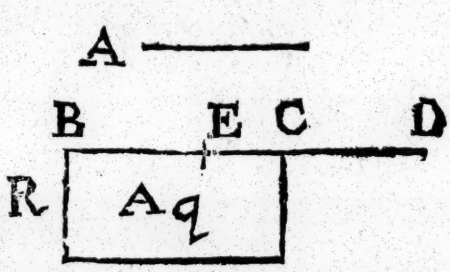
Nam Idem probari poteſt de ꝭq, quod de ʒq probatum fuit, in 37, 38, 40, 41. Sed pro 2ꝭ *Apot.* III. vel VI, ad expoſitam R, fiant RP=ꝭq: & RT=ʒ: Et RT-RP=2æ. Et reliqua fiant ſicut in 39. & 42. Nam ʒ-2æ=ꝭq.

80, 81, 82, 83, 84, 85. Lineis hiſce ſex ꝟ a-e, 2ꝭ *Apot*: una tantum congruit recta linea e, pro minore nomine. Nam aliter conſtituatur linea ꝭ, nempe a-e, etiam ex A-E. Per lem: 3, Z ʒ=2Æ-2æ: At in 2ꝭ *Apot*: I. IV, Z-ʒ eſt ꝟ, & 2Æ-2æ eſt mꝟ. Et in 2ꝭ *Apot*: II. V. Z-ʒ eſt mꝟ: & 2Æ-2æ eſt ꝟ (per 37, 38, 40, 41:) quare eadem quantitas eſt ꝟ & ꝟ: quod eſt abſurdum: In 2ꝭ vero *Apot*: III. VI. Quoniam (ſicut eſt in 45 & 48) Si ſupponatur ꝟꝭ conſtitui ex a, e; fiatque RP=ꝭq; RT=ʒ: & RT-RP=2æ: demonſtratum eſt ꝟ P conſtitui ex nominibus T, T-P, ꝟꝟ. Item ſi iterum ſupponatur ꝟꝭ conſtitui ex A, E, aliis nominibus; fiatque RP=ꝭq: RC=ʒ: & RC-RP=2æ. Similiter demonſtrabitur ꝟP conſtitui ex nominibus C, C-P (diverſis à T & T-P) ꝟꝟ. Quod eſt contra priorem

rem partem hujus demonstrationis. Est enim ɥr P *Apotome.*

86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100. 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111.	demonstrantur verbatim fere de & sicut de ℨ	49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73.

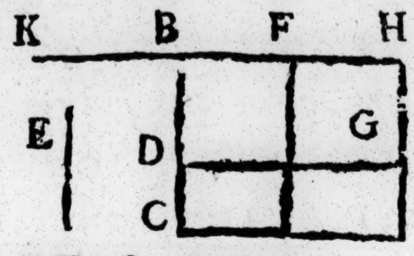
112. Eadem linea ɥr non est *Apotome*, & *Binomium.* Nam esto A *Apotome*, puta ℨ *Apot*: I. Exposita R, fiat R×BC=Aq. quare per 98 & 61, BC erit *Apotome* I; ei congruat CD. Sunt igitur BD, CD ɥr ӻ; & majus nomen BD ⊓ R. Rursus ponatur A *Binomium*, puta *Rad*:*Bin*: I, fiatque R×BC=Aq: Erit per 61 BC *Bin*: I: cujus nomina sunt BE, CE, ɥr ӻ; & BE ⊓ R. Sunt igitur & per 16, BD, BE, ED ɥr ⊓: ideoque ED, CD ɥr ӻ: quare CE *Apot*: ɥr. At CE fuit & ɥr. Quod est absurdum.



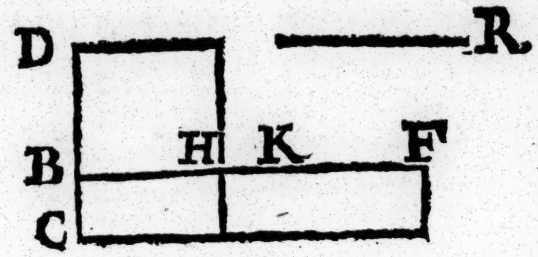
113, 114. Rq applicatum ad *Binomium*, latitudinem facit *Apotomen.* Sed applicatum ad *Apotomen*, latitudinem facit *Binomium.* Utrobique autem nomina sunt ⊓ proportionalia, & utriusque ordo idem. Nam in utroque Schemate, fiat BC×BF =Rq=DC×BH ɥr ⊓. Est igitur BC.DC::BH.BF: Et (BC ~ DC) BD. DC:: (BH ~ BF) FH. BF. His sic ordinatis,

Pro 113, Esto *Binomium* aliquod BC, scil: BD+DC: fiatque FH-BF. BF:: BF. BK. Est igitur

(BF+BK) FK.BK:: FH. BF:: BD.DC, ɤ ℨ. Quare FK, BK ℨ. Item (FK+FH) HK. FK:: (BK+BF) FK. BK, ℨ. Et HK. BK:: HKq. FKq:: FKq. BKq ⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓: At BH ɤ: quare HK, BK ɤ ⊓: Et FK-BK ɤ ℨ. Ergo per def: FK-BK, scil. BF est *Apotome*.



Pro 114. Esto *Apotome* aliqua BC, scil. DC-BD: fiatque FH. BF:: HK. FK:: (FH-HK. BF-FK) FK. BK:: FH. BF:: BD. DC ɤ ℨ. Quare HK. FK:: FK. BK ℨ: Et HKq, FKq ⊓. Unde & per 16, HK, BK, BH ⊓. At BH ɤ: Itaque BK ɤ, & FK, BK ɤ ℨ. Ergo per def: BK+FK, scil. FB. est *Binomium*.

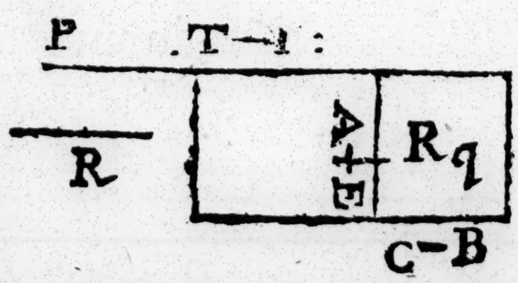


Secundò DC, BK ⊓: Et BD, FK ⊓. Nam BK ⊓ BH ⊓ DC. Et DC. BK:: BD. FK. Ergo

Tertiò Proportionalia.

Quartò sunt in eodem ordine; per 15 & 14.

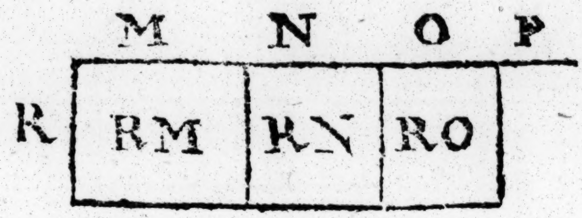
115. Si *Apotomes* T-P, & *Binomii* A+E nomina sint ⊓ & proportionalia: Nempe T.A ⊓:: P. E ⊓: Dico ▭ T-P in A+E esse ɤ. Nam exposita R, fiat A+E in C-B=Rq. Est igitur C-B *Apotome*; Et A, C ⊓:: E. B ⊓. per 113. Quare



C.T ⊐⊏:: C-B. T-P ⊐⊏:: A+E in C-B ꝶ. A+E in T-P etiam ꝶ. Et √q: A+E in T-P: ꝶ.

116. A Mediali M fieri poterunt innumeræ lineæ ꝶ, quę nec Mediæ sunt, nec ullæ ex bis senis antedictis. Nam exposita R, fiat MR; & sit N=√qMR. Dico N esse ꝶ, per lem: 1: at nec mediale; per 23: nec ullam ex bis senis, per 61,62,63,64,65,66, & 98,99, 100, 101, 102, 103.

Deinde fiat RN. & sit O=√q RN: Dico O ꝶ nec Mediale esse, nec ullam ex bis senis illis.



Tertio fiat OR, & sit P=√qOR: Dico P ꝶ esse nec Mediale, nec ullam,&c. Et sic in infinitum. Neque etiam ꝶ N, O sunt eædem. Nam N=√q MR. & O=√qNR: &c.

117: Diameter quadrati est lateri incommensurabilis: Nam alias si sit ⊐⊏; esto Diameter ad Latus, ut numerus D ad numerum L; sintque minimi termini in eadem ratione: Et ipsorum quadrata sunt verè numeri quadrati. At verò L non potest esse 1; quia quadratum diametri ad quadratum lateris est ut 2 ad 1: ideoque 2 esset numerus verè quadratus. Nec potest L esse numerus aliquis multitudinis: quia cùm sit Dq.Lq::2.1; & Lq metiatur Dq; etiam L. metietur D: ideoque D & L non erunt rationis suæ termini minimi: Est enim numerus multitudinis maxima utriusque communis mensura.

Finis Elementi decimi EUCLIDIS.

De Solidis Regularibus, *Tractatus.*

1. FIGURA quævis polygona rectilinea dividitur in triangula duobus pauciora, quam est numerus laterum. Nempe quadrangulum dividitur in duo triangula: quinquangulum in tria, &c.

2. Quare si è numero laterum tollatur 2, & reliquus duplicetur: vel si è numero laterum duplicato tollatur 4: habebis *summam angulorum rectorum* in rectilinea quavis figura interius comprehensorum. Sic triangulum intra se continet duos rectos: quadrangulum quatuor, quinquangulum sex: &c.

3. Figuræ autem cujusvis rectilineæ anguli exteriores omnes æquantur quatuor rectis.

4. Quare si quatuor anguli recti dividantur per numerum laterum, sive angulorum: quotus erit quantitas *unius anguli exterioris*, in figura rectilinea ordinata. Sic angulus exterior in trigono ordinato est $\frac{4}{3}$ recti, sive grad: $\frac{360}{3}$, in tetragono ordinato $\frac{4}{4}$ recti, sive gradus $\frac{360}{4}$: in pentagono ordinato $\frac{4}{5}$ recti, sive gradus $\frac{360}{5}$, &c.

5. Si quantitas anguli exterioris tollatur ex duobus rectis: vel si summa angulorum rectorum interiorum dividatur in numerum laterum: habebis quantitatem *unius anguli interioris*, in figura rectilinea ordinata.

dinata. Sequitur pars prior ex 4: poſterior ex 2. Exempli gratia, In octogono ordinato, anguli unius exterioris quantitas eſt $2 - \frac{4}{8}$ vel Gra: $180 - \frac{360}{8}$. Item 8)12($1\frac{1}{2}$ recti: vel Gra: 8) 12×90(135.

6. Numerus angulorum planorum in ſolido quovis regulari, invenitur multiplicando numerum angulorum planorum unius baſis in numerum baſium. Nempe anguli plani ſunt, in (4), 3×4: in (6), 4×6: in (8), 3×8: in (20), 3×20: in (12), 5×12.

7. Numerus angulorum ſolidorum in ſolido quovis regulari, invenitur dividendo numerum angulorum planorum in ſolido illo, per numerum angulorum planorum circa unum angulum ſolidum. Nempe anguli ſolidi ſunt in (4), $\frac{3 \times 4}{3}$: in (6), $\frac{4 \times 6}{3}$: in (8) $\frac{3 \times 8}{4}$: in (20), $\frac{3 \times 20}{5}$: in (12), $\frac{5 \times 12}{3}$.

8. Numerus linearum lateralium in ſolido quovis regulari, eſt ſemis numeri angulorum planorum in illo ſolido. Atque hic etiam eſt numerus rectangulorum, ſub latere, & lineâ perpendiculari è centro baſis in latus. Nam unaquæque linea lateralis duobus inſervit angulis.

9. Quare rectangulum ſub latere, & linea perpendiculari è centro baſis in latus, eſt ſuperficiei totius, in (4), $\frac{1}{6}$: in (6) & (8), $\frac{1}{12}$: in (20) & (12), $\frac{1}{30}$. Eſt 6 & 7 e 14.

10. Solidum quodque regulare æquale eſt ſuperficiei ſuæ trienti ducto in lineam perpendicularem è centro ſuo in baſem.

11. Si linea 5 ſecetur ſecundum extremam & me-

diam

diam rationem, ut σ ſit majus ſegmentum, & τ minus: Dico $\sigma q = \varsigma\tau = \sigma\tau + \tau q$. per 11 & 3 e 2.

12. $Q: \frac{1}{2}\varsigma + \sigma: = 5 Q: \frac{1}{2}\varsigma$. Nempe $\frac{1}{4}\varsigma q + \varsigma\sigma + (\sigma q)\ \varsigma\tau$. Eſt 1 & 2 e 13.

13. $Q: \frac{1}{2}\sigma + \tau: = 5 Q: \frac{1}{2}\sigma$. Nempe $\frac{1}{4}\sigma q + (\sigma\tau + \tau q)\ \varsigma\tau$. Eſt 3 e 13.

Quare $\sigma.\tau :: \tau.\sigma - \tau$. Nam (per 11.) $\sigma q - \sigma\tau = \tau q$.

14. $\varsigma q + \tau q = 3\sigma q$. Nempe $\sigma q + (2\sigma\tau + \tau q + \tau q)\ 2\varsigma\tau$. Eſt 4 e 13.

15. $\varsigma + \sigma.\varsigma :: \varsigma.\sigma$. Nempe $\varsigma + \sigma.\varsigma :: \sigma + \tau.\sigma$. Eſt 5 e 13.

16. Si ς ſit ϒ, σ erit *Apotome.* Nam quia per 13, $\frac{1}{2}\varsigma + \sigma.\frac{1}{2}\varsigma :: \sqrt{q}5.1$: Erunt $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma$ $\frac{1}{2}\varsigma$ ϒ ꟻ, per def: 6 e 10. Et per 37 e 10, erit $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma + \frac{1}{2}\varsigma$ *Binomium.* Ergo per 74 e 10, $\sigma + \frac{1}{2}\varsigma - \frac{1}{2}\varsigma$ *Apotome*, hoc eſt σ.

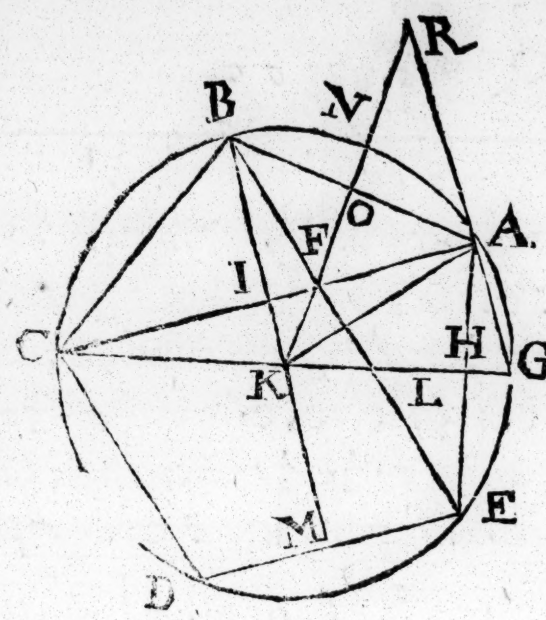
Item ſi ς ſit ϒ, τ erit *Apotome.* Nam per 61 & 98 e 10, $\frac{\sigma q}{\varsigma \text{ϒ}}$ (hoc eſt τ) *Apotome.* Vide 14. Eſt 6 e 13.

17. Si ς ſit ſubtendens angulum pentagoni ordinati; erit σ latus pentagoni. Dico in Schemate, AC.CF:: CF.AF: At CF = CB = AB. Nam quia trianguli BCF, omnes tres ang: = $\frac{10}{5}$ recti: è quibus ang: BCF = $\frac{6}{5}$ recti; & ang: CBF = $\frac{2}{5}$ recti: tertius igitur ang: CFB = $\frac{2}{5}$ recti: quare CF = CB = AB. Et quia liquet tri: ACB, BAF ſim: Erit AC.AB:: AB. AF: Ergo. Eſt 8 e 13.

Conſect. Et ſi ex angulo B per centrum, ad oppoſitum latus pentagoni, ducatur BKM, ſecans ipſam AC in I: ſecabitur etiam linea BM ſecundum extremam & mediam rationem in puncto I. Nam quia in tri: EBM, lateri EM parallela eſt FI: erit per 2 e 6, IM. IB:: FE. BF:: CF. FA. Ergo.

18. Si

18. Si circuli alicujus radius σ, erit τ latus decagoni. Nam quia arcus ABC=2GAN, erit ang: RKG=KGA=KAG: ideoque tri: RGK, KAG sim. Estque RG. KG:: KG. AG. Atque AR =KG, quia ang: ½RKG=KRG. Secatur igitur RG secundum mediam & extremam rationem in puncto A. Ergo latus decagoni AG est minus segmentum. Est 9 e 13. Quare etiam si ς sit Radius, erit σ latus decagoni.



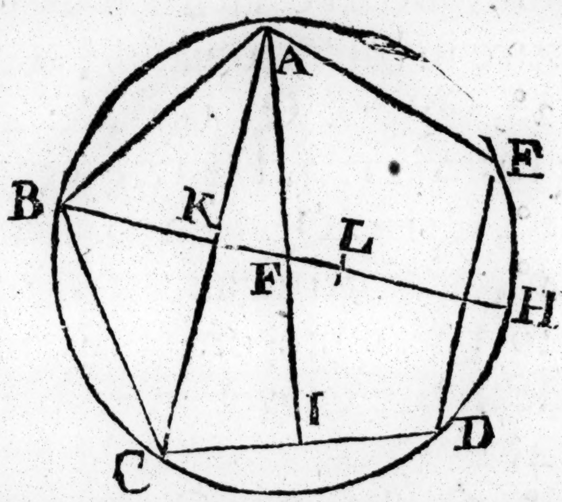
19. Perpendicularis KH vel KO, a centro in latus pentagoni ordinati, æquatur semisummæ Radii & lateris decagoni, Nempe KO=½RG=½KR. Nam quia KR=RG; sublato utrinque radio, manebit RN=AG. Estque KO=RO, per 2 e 3. Est 1 e 14.

20. Quadratum lateris pentagoni ordinati, minus quadrato Radii, æquatur quadrato lateris decagoni: Nempe AEq-KGq=AGq. Nam quia AHq+GHq =AGq: Et quia KG secatur med: & extr: ratione in L; estque KL=AG: Erit AEq+GLq=4AGq: Et per 14, KGq+GLq=3AGq. Fiat subductio. Est 10 e 13.

21. Quadratum lateris pentagoni, plus quadrato lineæ

lineæ subtendentis angulum pentagoni, æquatur quinque quadratis Radii. Nempe in schemate præcedente, AEq+CAq=5KGq. Nam CAq+AGq=4KGq: & per 23, AEq-AGq=KGq. Fiat additio. Est hæc 3 e 14.

22. Si circuli Radius sit rationalis, latus pentagoni inscripti erit irrationale, Nempe Minor. Nam quia triang: rect: AIC, AKF sim: erit CI.½AC::KF.½AF: ideoque 2CI. CK::KF. ¼AF=FL, quia quadrans est Radii: Et CD+CK. CK::KL.FL. At per 17, si CD sit σ, CK erit ½ς: quare si FK sit σ, FL erit ½ς: & per 12, KLq=5FLq. Est autem BLq=25FLq. quare BL. KL:: √q25. √q5, ⧖ ⧖, per def: 6 e 10: Et sic ipsorum quadrata: unde etiam BLq. BLq-KLq:: 25. (25-5) 20:: 5.4: Et BL. √u: BLq-KLq:: √q5. 2, ⧖. Quare BL-KL, nempe BK est ⧖ *Apotom*. IV, per def: & 47 e 10: quippe ostensum est, A, E ⧖ ⧖; A ⧖ √X; & A ⧖ R. Item BCq=BKq+CKq=BKq+BK×BH (per 35 e 3) =⧖ BK×⧖ BH. Ergo per 95 e 10, BC est ⧖ *Apot*.IV, hoc est Minor. Est 11 e 13.



23. In

23. In triang. rect. cujus Hypotenusa Z dividitur in segmenta A, E, perpendiculari ex angulo recto demisso, Erit 1°, ZA = Bq: & ZE = Cq. & AE = mq.

II°, A. E:: Aq. mq:: mq. Eq:: Bq. Cq.

III, Z. A:: Zq. Bq:: Bq. Aq:: Cq. mq.

IV°, Z. E:: Zq. Cq:: Cq. Eq:: Bq. m q.

24. Si triangulum æquilaterum inscribatur circulo: 1° perpendicularis è centro in latus æquatur $\frac{1}{2}$ Radii. Ideoque altitudo Δi, sive perpendicularis è vertice in basem æquatur $\frac{3}{2}$ Radii.

2°, Q: dia. Q: lat: Δi:: 4. 3: ideoque Q: Rad. Q: lat: Δi:: 1. 3. Est 12 e 13.

3°, Q: lat. Q: alt: Δ:: 4. 3. sc: 3. $\frac{2}{4}$. Est 12 e 14.

4°, Area trianguli æquilateri $\sqrt{\frac{27}{16}}$, æquatur quadrato mediæ proportionalis inter altitudinem & semissem lateris: vel inter latus & $\frac{1}{2}$ altitud. Est 29 e 14.

5°. Q. lat: Δi. Q: perpend: à cent: in bas: 3. $\frac{1}{4}$. Est 18 e 14.

25. Si quadratum inscribatur circulo: latus ipsius erit $\sqrt{2}$: Et Q: lat: □i. Q: dia:: 1. 2.

26. Si eidem circulo inscribatur, tum triangulum æquilaterum, tum quadratum: 1°, Q: lat: Δi. Q: lat: □i:: 3. 2: per 24 2°, & 25. Est 16 e 14.

2°, Q: alt: Δi. Q: lat: □i:: 9. 8: per 24 3°, & 26 1°.

3°, Δ. □:: $\sqrt{27}$. 8: scil: $\sqrt{\frac{27}{16}}$. $\sqrt{4}$.

27. Latera quinque solidorum regularium exponere,

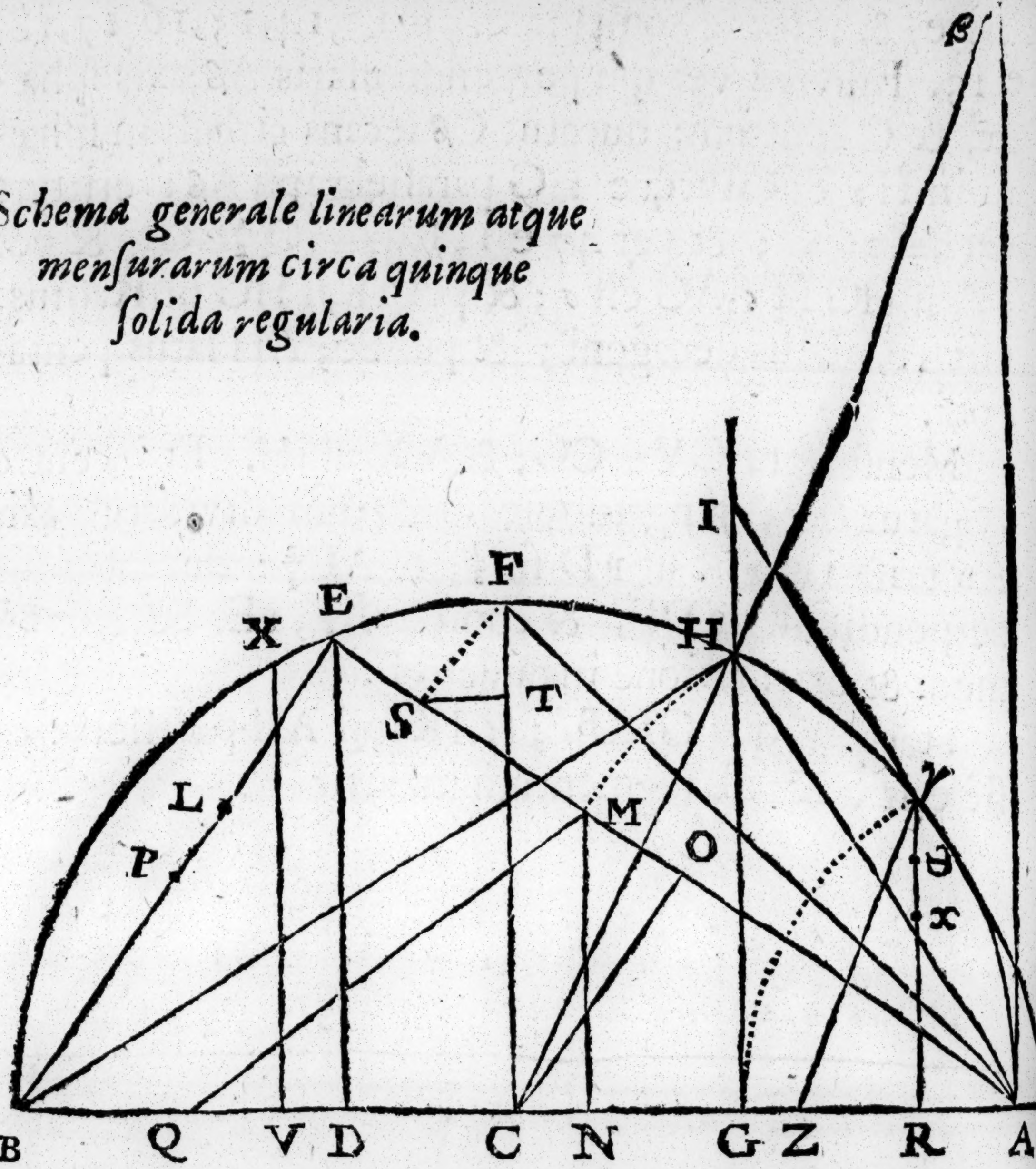
nere, & inter se comparare. Ist 13,14,15,16,17,18, e 13. Esto Ab vel ipsi perpendicularis Aβ, axis sphæræ, & C centrum: ducatur Cβ secans circulum sphæræ in H; ducaturque HG parallela ipsi Aβ: eritque GH=2CG; & per 47 e 1, Rq=5Q:½HG; & per 12, si HG sit ς, AG est σ; & per 18, si HG sit Radius, erit AG latus decagoni; & per 20, AH latus pentagoni.

Mensuretur CV=CG; & VX=GH. Et è centro erigatur CF; jungaturque AF. tum dividatur axis Ab trifariam, sic ut bD sit ⅓, & AD⅔: ducanturque perpendicularis DE, & chordæ AE, bE. Secetur BE med: & extr: ratione in puncto L.

Statuaturque GI=BE; & IK ipsi AH parallela: Et sic erit GK=bL segmentum majus.

Schema

Schema generale linearum atque mensurarum circa quinque solida regularia.



His diligenter memoriæ mandatis, ad ipsa quinque corpora regularia declaranda pergemus.

28. De Tetraëdro. Latus (4) est AE; & DE Radius circuli ambientis basem ipsius triangulam. Nam per 23 IV°, AEq. DEq :: AB.BD :: 3.1 :: Q: lat: Δi.Q: Rad: per 24 2°. Et CD & perpendicularis è centro sphæræ in basem, scil: $\frac{1}{6}$ axis. Et $\frac{1}{2}$DE est perpendicularis è centro basis in latus, per 24 1°.

29. De Hexaëdro. Latus (6) Est BE vel GI. Nam per

per 23 IV, ABq.BEq::AB.BD::3. 1. Et quia per 23 I1o, AEq=2BEq: erit ABq=3BEq (hoc est quadratum diagonii Cubi æquatur tribus quadratis lateris) Estque per 25, Q:lat:□i. Q:dia circ::1.2::BEq AEq. Quare $\frac{1}{2}$AE est Radius circuli ambientis basem triangulam (6). Liquet etiam quod $\frac{1}{2}$BE æquatur perpendiculari, tum è centro sphæræ in basem, tum è centro basis in latus. Denique quia ABq. BEq::6.2::Q: axis. Q:lat:(6):Erit 2Q:axis=6Q:lat(6); quæ superficies est Cubica.

30. De Octaëdro. Latus(8) est AF vel AS. Nam(8) constat duabus pyramidibus quadrangulis, quarum altitudo est semiaxis: & Q: axis. Q: lat (8) ::2.1. Et quia per 24 20, Q:lat△i, quod est Q:lat(8). Q:diam: circuli ambientis::3.4. Erit Q: axis. Q:diam::3.2. Ductaq; ST parallela axi, quia ASq.CTq::ABq.BEq:: 3.1: Estque ASq=AFq=$\frac{1}{2}$ABq: quare CTq=$\frac{1}{2}$BEq =$\frac{1}{4}$AEq: ideoque CT=$\frac{1}{2}$AE; qui radius est circuli ambientis tum basem(6), tum basem (8). Et si AS vel AF sit latus △i, erit CT Radius circuli ambientis per 24 20: Et $\frac{1}{2}$CT perpendicularis è centro △i in latus, per 24 10. Est autem superficies (6)=12BE×$\frac{1}{2}$BE: & superficies (8)=12AF×$\frac{1}{2}$CT, quod satis liquet: Quare BE×$\frac{1}{2}$BE. AF×$\frac{1}{2}$CT: superf: (6). superf:(8):: (6). (8)::BE. AC. Est 27 e 14. Quoniam AFq.ACq:: BEq. CTq=$\frac{1}{2}$BEq.

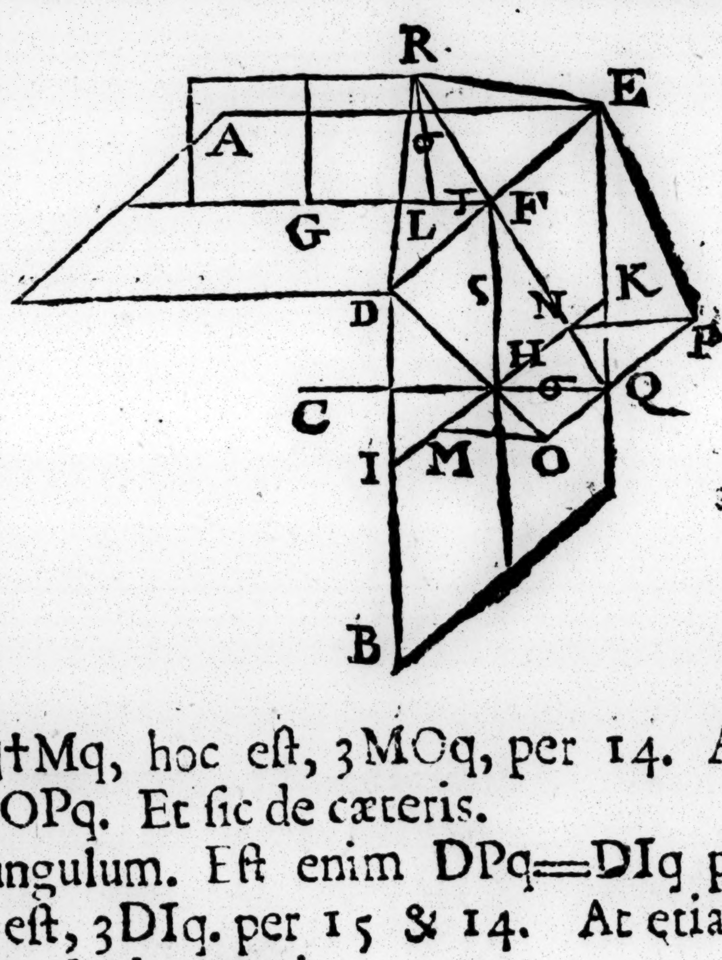
31. De Icosaedro. Latus(20) est AH vel AM. Nam Radiis GH & VX æqualibus cogitentur duo circuli describi, perpendiculariter insistentes plano AHXB: atque in ipsis includi, tum pentagonum ordinatum lateris AH, tum decagonum lateris AG: sit ut pun-

ctum H ſit angulus pentagoni, & X decagoni: unde anguli pentagoni in uno circulo perpendiculariter imminebunt angulis decagoni in altero, ad diſtantiam GV=GH. Et è ſingulis angulis unius pentagoni ducantur duæ hypotenuſæ ad angulos alterius utrinque proximós: Item ex ſingulis angulis utriuſque pentagoni, in proximum axis terminum A vel B, ducantur hypotenuſæ: quæ quidem omnes, hypotenuſæ erunt triangulorum rectangulorum, quorum Cathetus æqualis eſt Radio GH, & baſis lateri decagoni AG; ideoque ſingulæ æquales lateri pentagoni AH. Quare deſcripta erit figura conſtans 20 triangulis æquilateris & æqualibus. Includi autem angulos illos omnes ſphæra, patet ex angulo H: nam circumvolutus ſemicirculus AHXB reliquos ſimiliter angulos perſtringet. Eſt igitur GH Radius circuli ambientis pentagonum (20); & ɤ quia 5.1::CHq.GHq: eſt autem CH=$\frac{1}{2}$AB, & CG=$\frac{1}{2}$GH: Atque idcirco AH latus (20) eſt ɤ, nempe Minor, per 25. Tum demiſſa MN perpendiculari in axem, ſtatuatur MQ =AC, $\frac{1}{2}$ axis: erit MN Radius circuli circa baſem, per 24 2°; quia AM.MN:: AE.DE::3.1: Et $\frac{1}{2}$ MN perpendicularis è centro baſis in latus, per 24 1°: Et NQ perpendicularis è centro ſphæræ in baſem; quia ibi Q eſt inſtar centri ſphæræ. Denique BEq.GHq::5.3: Nam BEq. ABq::1.3: & ABq. GHq:: CHq. CGq:: 5.1.

32. De Dodecaëdro. Latus (12) eſt BL vel GK, in præcedente ſchemate: & BE vel GI (latus (6)) ſubtendit angulum baſis pentagonæ (12). Nam in ſequente ſchemate, deſcribantur duæ baſes (6), AD,

EB

EB, quarum commune latus est DE; & centrum sphæræ C; & centrum basis unius G, alterius H. A centro G ducatur GF perpendicularis lateri DE; & per centrum H ducatur IHK ipsi DE parallela Erunt igitur GF, HI, HK, semisses lateris (6): secentur singulæ in $\sigma\tau$ punctis L, M, N; ut majus segmentum sit ubique centro proximum: & in punctis, L, M, N, erigantur tres perpendiculares LR, MO, NP, æquales ipsi majori segmento: & ducatur OP, latus (12): est enim IK. OP :: ς, σ :: BE. BL, schematis præcedentis. Ducantur etiam DO, DR, EP, ER, quæ cum OP includunt pentagonum, basem quidem (12). Nam



1°. Pentagonum DOPER est in uno plano: Est enim RFQ uno recta linea, per 32 e 6.

2°, Est æquilaterum: est enim DOq = MOq pl. DI q+Mq, hoc est, 3MOq, per 14. At etiam 4MOq = OPq. Et sic de cæteris.

3°, Est equiangulum. Est enim DPq = DIq pl. INq+NPq, hoc est, 3DIq. per 15 & 14. At etiam 4DIq = DEqs Et sic de cæteris.

4°, Circumscribitur sphæra; Est enim CPq = CQq+QPq, hoc est, 3CHq, per 15 & 14. At

Q: axis. Q:lat(6)::3.1::Q:$\frac{1}{2}$ axis. Q:$\frac{1}{2}$lat (6).Et ſic de reliquis.

5o, Circa (6) deſcribentur 12 ejuſmodi pentagona Cum enim per II, ſint in (6) latera 12; unicuique lateri ſuum adhærebit pentagonum; ſicut intuenti perſpicuum erit.

6o, Latus (12) eſt Apotome: Eſt enim DE latus (6) ϰ ⅂ axi: at per 16, ſi ς(DE)ſit ϰ, σ (OP) erit Apotome.

His ſic oſtenſis, ad prius illud ſchema redeundum denuò erit: In quo menſuretur Kγ=KG=BI. lateri (12): & demittatur γR. Erit per 20,γR Radius circuli circa baſem pentagonam: Et per 19,Rθ, ſcil. $\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK, eſt perpendicularis è centro baſis in latus. Eſt autem Rγ=MN: Nam quia (3BEq)3GIq=Q: axis=5GHq, erit 5.3 :: GIq. GHq :: GKq. GAq :: GIq+GKq.GHq+GAq : hoc eſt, per 17 & 21:5Rγq. AMq=3MNq, per 23 IVo. Quare 3×5Rγq=5×3MNq. Eſtque QN perpendicularis à centro ſphæræ in baſem. Eſtque ſuperficies (20)=30 AH×$\frac{1}{2}$MN: & ſuperficies (12)=30GK×Rθ, quod ſatis conſtat. Quare AH×$\frac{1}{2}$MN.GK×Rθ::ſuperf. (20).ſuperf.(12):: (20). (12).

33. Si axis ſphæræ æqualis ſit, tum √u:ςq+σq unius lineæ, tum √u:ςq+τq alterius lineæ: erit σ latus (20); & τ latus (12). Nam in Schemate priore generali, ς,σ::GH. AG::BH. AH: At ABq=BHq+AHq. Item ABq=3BEq=Q:BE+BL: pl BLq: hoc eſt 3ςq=Q:ς+σ:plσq. Eſt enim σq=ςτ. Eſt 23 e 14.

34. √u:ςq+σq. √u:ςq+τq::lat (6). lat (20) hoc eſt, Kγ.Zγ::BE. AH, vel GI. AM: ſecta ſcil.KZ=Rγ med: & extr: ratione in puncto R. Nam per 23 IVo,

AMq=3Rγq: Et per 17, Zγq=3RKq. Quare AM. Zγ::Rγ. RK::ς.σ::GI.KG. Est 10 e 14.

35. Latus (6). Latus (20)::superf. (12). superf. (20). hoc est GI. AM::KG×Rθ. AM×$\frac{1}{2}$Rγ. Nam KG×Rθ=GI×$\frac{1}{2}$Rγ. Est enim GI.KG::ς.σ::Rγ+RK. Rγ::($\frac{1}{2}$Rγ+$\frac{1}{2}$RK) Rθ.$\frac{1}{2}$Rγ, per 18. Est 9 e 14.

36. Q: perpendic: è centro sphæræ in basem (4). Q: perpend: è centro sphæræ in basem (8) :: 1.3:: CDq. $\frac{1}{4}$BEq.

37. Q: lat (4). Q: lat (8):: Basis (4). Basis (8). Nam AEq.ABq::2.3: Et ABq. AFq::4.2. Est 14 e 14. Hinc consectarium est,

Quod, Superf (4). superf (8)::2.3: scil. 4×4. 8×3.

38. Q:(4). Q:(8)::4. 27. per 36 & consect: 37 Nempe $\times\left\{\begin{matrix} 1.\ 3 \\ 4.\ 9 \end{matrix}\right\}$. Est 17 e 14.

39. Basis (6). Basis (8)::8.$\sqrt{27}$: Nempe $\frac{4}{3}$.$\sqrt{\frac{3}{4}}$.

40. Basis (4). Basis (6)::$\sqrt{3}$.2:: altit:△i (4). latus △i (4): nempe $\frac{1}{2}$BE.AE. Est 30 e 14.

41. Superf (4). Superf (6) ::1. $\sqrt{3}$: Nempe $\sqrt{\frac{4}{3}}$×4.8: hoc est, △m (4)×4.2Q: axis.

42. Tria(4)=(6): per 41 & 36: Nempe $\times\left\{\begin{matrix} 1.\sqrt{3} \\ 1.\sqrt{3} \end{matrix}\right\}$ est 32 e 14. Hinc consectarium est,

Quod $\left\{\begin{matrix} \text{Prisma basis \& altitudinis (4)=(6). Et} \\ \text{Pyramis basis \& altitudinis (6)=(4).} \end{matrix}\right.$

43. (8). 3(4) :: latus (8). latus (4): Nempe 2. ($\sqrt{\frac{16}{27}}$×3) $\sqrt{\frac{16}{3}}$::$\sqrt{2}$. $\sqrt{\frac{8}{3}}$. Est 22 e 14.

44. Si latus (8)=√u:σq+τq, erit latus (20) =√2τq. Nam BH+HA secatur med: & extr: ratione in H: Estque 2σq+2τq=2AFq=ABq= BH

BHq+AHq. Ergo AHq=2τq. Est 24 e 14.

45. Si latus (8)=√u:$\frac{1}{2}$ςq+$\frac{1}{2}$τq, Erit latus (12) =τ. Nam GI+GH secatur med: & extre: ratione in G: Estque ςq+τq=2AFq=ABq=3GIq=Q: GI+GK:+GKq. Ergo GKq=τq. Est hæc 25 e 14.

46. Si latus (4)=√u: σq+τq, erit latus (20) =√$\frac{3}{2}$τq. Nam BH+HA secatur media & extr: ratione in H: & $\frac{3}{2}$σq+$\frac{3}{2}$τq=$\frac{3}{2}$AEq=ABq=BHq +AHq. Ergo AHq=$\frac{3}{2}$τq. Est hæc 26 e 14:

47. Si latus (6)=√u: σq+τq, erit latus (20) =√3τq. Nam BH+AH secatur med: & extr.ratione in H: & 3σq+3τq=3GIq=ABq=BHq+AHq.Ergo AHq=3τq.

48: Si latus (6)=√u: ςq+τq, erit latus (12) =√3τq. Nam GI+GK secatur med. & extrem. ratione in H: & 3ςq+σq=3GIq=Q: GI+GK:+GKq. Ergo GKq=3τq.

49. Si axis sphæræ sit ϰ, superficis, tum (4), tum (8), erit mϰ. Nam quia 3.2::Q:axis.AEq:erit Q:lat.(4)=$\frac{2}{3}$Q: axis: est etiam Q:lat. (8)=$\frac{1}{2}$Q:axis: scil. utrumque ϰ: quare & ipsorum latera sunt ϰ. At in Δ°,per 24 3°,Latus. altitud::2.√ 3,ϰ ꟻ.ergo per 22 e 10, area Δi est mϰ. Est 13 e 14.

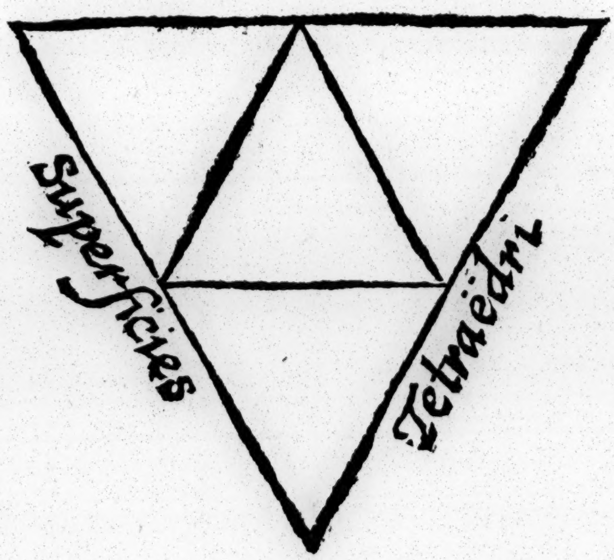
Notandum autem, quod in his quæ tum de elemento X, tum de V corporibus regular. scripta sunt, propositionum numerus est juxta Ch. Clavium.

Corporum

Corporum quinque regularium menſuræ, ad axem ſphæræ 2. Conſulatur Schema generale.

I. *In Tetraëdro.*

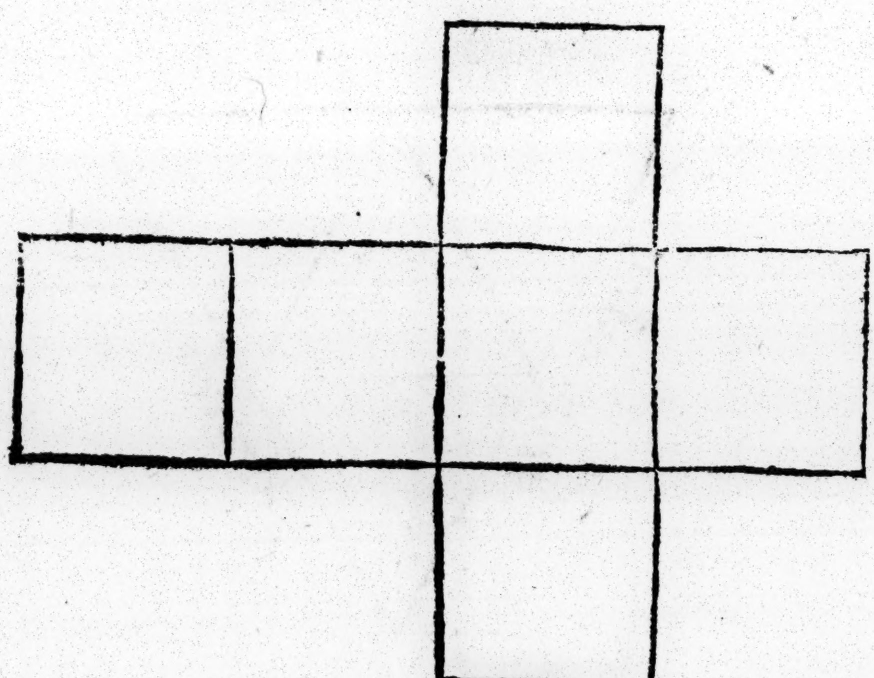
AE latus (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{3}}$: 1|632932.
DE ſemidiameter circuli ambientis baſem triangulam (4), eſt $\sqrt{\frac{8}{9}}$: 0|942809.
Altitudo baſis (4), eſt 1|414213.
Area baſis (4), eſt 1|154657.
Superficies (4), eſt 4|618628.
CD perpendicularis è centro ſphæræ in baſem (4), eſt $\frac{1}{3}$, 0|333333.
Soliditas (4), eſt 0|513216.



II. *In Hexaëdro.*

BE latus (6), est $\sqrt{\frac{4}{3}}$; 1|154700.
CT est semidiameter circuli ambientis basem quadrangulam (6), $\sqrt{\frac{2}{3}}$: |0816490.
Area basis (6), est $\frac{4}{3}$: 1|333333.
Superficies (6), est 8: Nempe bina quadrata axis sphæræ.
$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro sphæræ in Basem (6) est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.
Soliditas (6), est 1|539600.

Superficies Hexaëdri.



III.

III. *In Octaëdro.*

AF latus (8), est $\sqrt{2}$: 1|414213.

CT est semidiameter circuli ambientis basem triangulam (8), est $\sqrt{\frac{2}{3}}$: 0|816490.

Altitudo basis (8), est 1|224735.

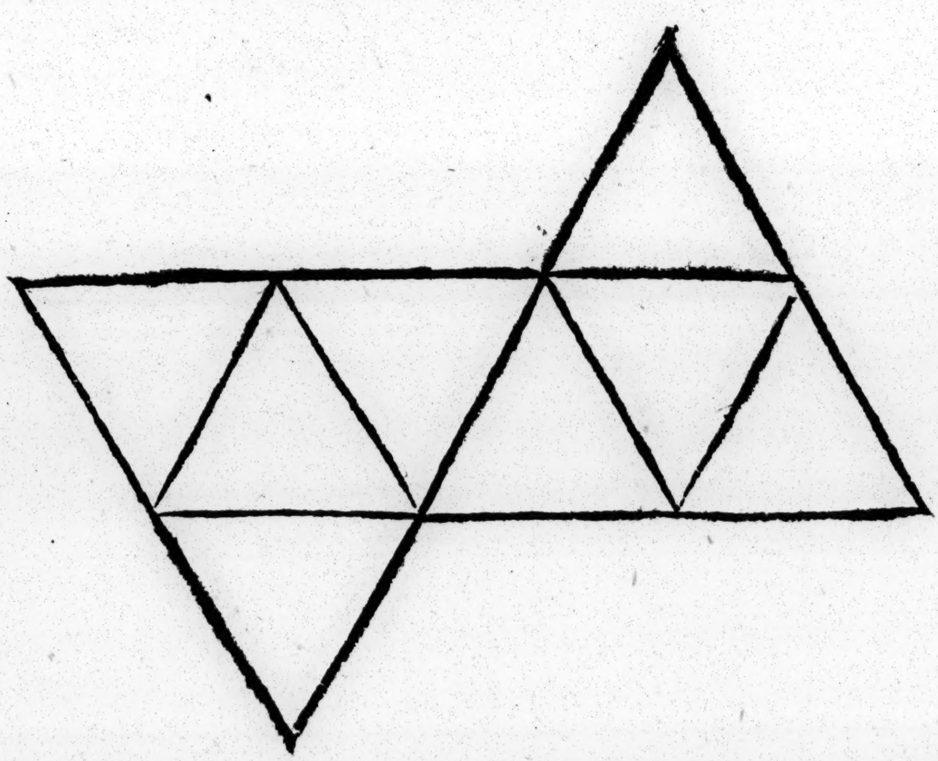
Area basis (8), est 0|866018.

Superficies (8), est 6|928144.

$\frac{1}{2}$BE perpendicularis è centro sphæræ in basem (8), est $\sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|577175.

Soliditas (8), est 1|333333.

Superficies Octaëdri.



IV. *In Icosaëdro.*

AH latus (20), est $\sqrt{u: 2 - \sqrt{\frac{4}{5}}}$: 1|05573.

MN = Ry semidiameter circuli ambientis basem triangulum (20), est $\sqrt{u: \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|607062.

Altitudo basis (20), est 0|910593.

Area basis (20) est 0|503362.

Superficies (20), est 10|067240.

QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (20,) est $\sqrt{u: \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|794654.

Soliditas (20), est 2|666658.

GH semidiameter circuli ambientis pentagonum (20), est $\sqrt{\frac{4}{5}}$: 0|894427.

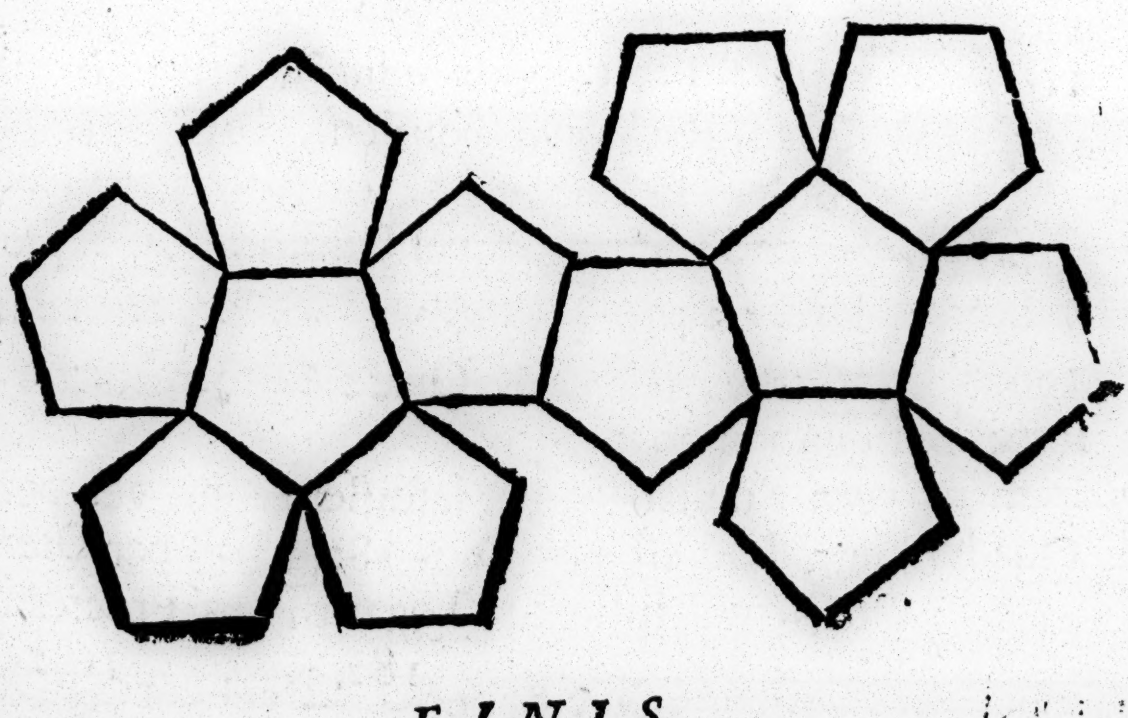
Superficies Icosaëdri.

V.

V. In Dodecaëdro.

GK = BL latus (12), est $\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}$: 0|713642.
Rγ = MN semidiameter circuli ambientis basem quinquangulam (12), est $\sqrt{u:\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|607062.
Rθ = $\frac{1}{2}$Rγ + $\frac{1}{2}$RK, perpendicularis è centro basis in latus, est 0|49112.
Area basis (12), est 0|876211.
Superficies (12), est 10|514532.
QN perpendicularis è centro sphæræ in basem (12), est $\sqrt{u:\frac{1}{3} + \sqrt{\frac{4}{45}}}$: 0|794654.
Soliditas (12), est 2|785137.

Superficies Dodecaëdri.



FINIS.

DE ANATOCISMO, SIVE USURA COMPOSITA.

Hoc eſt, Sex Theorematum fundamentalium, quibus Quæſtiones omnes circa Anatociſmum, facili negotio, ſolvi poterunt, inveſtigatio Analytica.

Notandum autem eſt, quod Solidus Anglicus continet 12 Denarios: Et Libra ſive Mina continet 20 Solidos; Denarios verò 240.

1. RATIO fœnoris reducenda primò eſt ad Rationem æqualem, cujus antecedens ſit 100, vel 1. Ut ſi Ratio ſit Denariorum 14|4, vel Solidorum 1|2. pro 1 Libra: Dic, 240. 254|4, vel 20. 21|2:: 100. 106::1. 1|06: nempe α. β. Quare β procreatur ex ſorte α, in uno anno integro.

2. Si vero Solutio ſit per ſemiſſem anni, vel per Quadrantem, hoc eſt per Dies 182|5, vel per Dies 91|25: Pro β, multiplicetur Logarithmus Procreati annui per $\frac{1}{2}$ vel per $\frac{1}{4}$: Sive & per $\frac{182|5}{365}$, vel per $\frac{91|25}{365}$.

Perperam enim vulgò ſumitur $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{4}$ annui fœnoris.

3. Quia

3. Quia in progressione, numerus Rationum unitate minor est, quàm N numerus terminorum, sive Solutionum; erit numerus Rationum N-1. Item Logarithmus β ductus id N-1, erit Logarithmus ω ultimi termini. Denique Logarithmus β ductus in N, erit Logarithmus $\beta\omega$, hoc est, ipsius β multiplicati in se continuè pro numero Solutionum.

4. Quare $\beta\omega$ procreatur ex a sorte, sive 1lb, elocata pro N vicibus. Hinc Duo oriuntur Theoremata.

Theo: I. 1lb. $\beta\omega$:: Qlb. Qlb cum lucro in N vicibus.

Theo: II. $\beta\omega$. 1lb:: Qlb post N vices. valor præsens.

5. Deinde quia $\frac{\beta\omega - \alpha a}{\beta - \alpha}$, hoc est, $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1} = Z$, summæ omnium terminorum Progressionis (quorum ultimus est ω) estque incirco Procreatum ex Pensione 1lb intermissa pro N vicibus: Hinc duo oriuntur alia Theoremata.

Theo: III. β-1. $\beta\omega$-1:: Qlb Pensio intermissa pro N vicibus. Pensiones cum fœnore solvendæ in fine.

Theo: IV. $\beta\omega$-1. β-1:: Qlb futura. Pensio æquivalens solvenda in N vicibus.

6. Denique quia $\beta\omega$ procreatum ex 1lb elocata pro N vicibus: Estque $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1}$ procreatur ex Pensione 1lb intermissa pro N vicibus; quod in pecuniis numeratis æquivalet pretio Pensionis: Dic, $\beta\omega$. 1lb:: $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1}$. $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1 \text{ in } \beta\omega}$ Unde igitur in N vicibus procreabitur $\frac{\beta\omega - 1}{\beta - 1}$

Pretium

Pretium Pensionis. Hinc etiam oriuntur duo Theoremata.

Theo: V. β-1 in $\beta\omega$-1 :: Qlb Pensio pro N vicibus: Pretium ejusdem in pecuniis numeratis.

Theo: VI. $\beta\omega$-1. β-1 in $\beta\omega$ :: Qlb præsens. pensio emenda pro N vicibus.

Nota quod Qlb significat quantamlibet librarum summam.

Exemplum de Pensione durante 10 annos, solutione semestri; in Ratione 1 ad 1|06. Estque N 20.

Et Logar: 1|06 est 0|025306.

0, 025306 in $\frac{1}{2}$
0, 012653 Log: β = 1|0296
20N

0, 253060 Log: $\beta\omega$ = 1|791
2, 471291 Log: β-1 = 0|0296.
2, 724351 Log: β-1 in $\beta\omega$

1, 898176 Log: $\beta\omega$-1 = 0|791.

Est igitur

1, 898176
2, 724351

1, 173825 Logar: Pretii 14|92 lb pro Pens: 1 lb.

$\bar{2}$, 724351
$\bar{1}$, 898176

$\bar{2}$, 826175 Logar: Pensionis 0|06701 lb pro Pret: 1 lb.

Logarithmis hisce inventis adde Logar: Qlb.

Vel valores hosce inventos multiplica per Qlb.

REGULA

REGULA FALSÆ POSITIONIS.

Multiplica Positiones per alternos errores. Et si errores sint ejusdem generis, nempe uterque excedens, vel uterque deficiens; Differentiam productorum divide per Differentiam errorum: Si verò diversi sint generis; Summam productorum divide per Summam errorum: Et Quotus dabit numerum quæsitum.

Demonstrationis gratia. Quis numerus est, qui ductus in B, producit planum BA, nempe ABpl.

Esto A-C Esto A-D
in B. BA-BC in B. BA-BD
Errores igitur sunt
BApl-BA+BC. BApl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt similia; ut quæ æqualia sunt, expurgentur; opus est ut Subductio fiat, mutando omnia signa minoris. Nam sic æqualibus se mutuò elidentibus, manebit errorum Differentia, BC-BD:

BC defic: BD defic:
AD A-C
BCA-BCD BDA-BDC

Hic etiam æqualibus utrinque per Subductionem expunctis;

expunctis; Reductio fit ad BCA-BDA: quæ est ipsa errorum differentia ducta in A.

$$\text{Quare}\ \frac{BCA-BDA}{BC-BD} = A.$$

Iterum	Esto A+C.	Esto A-D
	in B.BA+BC.	in B.BA-BD.

Errores igitur sunt.

BA+BC-BA pl. BA pl-BA+BD.

Quia utrobique signa sunt contraria; æqualia per Additionem, absque ulla signorum mutatione, se mutuò elident: Et sic manebit eorum summa, BC+BD.

BC exced:	BD defic:
A-D	A+C
BCA-BCD	BDA+BCD.

Hîc etiam æqualibus utrinque per Additionem expunctis; Reductio fit ad BCA+BDA: quæ est ipsa errorum summa ducta in A.

$$\text{Quare}\ \frac{BCA+BDA}{BC+BD.} = A.$$

FINIS.

Rerum quarundam denotationes.

R radius, eſt ſemidiameter circuli, ſive uno conſtet nomine AO, vel Eω, vel IU : ſive duobus ut AO+Eω, vel Eω+IU : ut in ſchemate 1.

$\delta.\pi$: : ſemidiameter. ſemiperipheria.

$\frac{\pi}{\delta}$R, eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt R.

$\frac{\pi}{\delta}$:AO+Eω : eſt ſemiperipheria circuli cujus Radius eſt AO+Eω.

$\frac{\pi}{\delta}$Rq, eſt area circuli.

$\frac{\pi}{3\delta}$Rq × altitud: vel $\frac{\pi}{\delta}$Rq in $\frac{1}{3}$ Altitud, eſt Conus, ſcil: $\frac{1}{3}$ Cylindri.

O ſignificat ſuperficiem curvam.

Coni & Cylindri, qui in æqualibus ſunt baſibus ſunt ut altiudines. 14 e 12.

Æqualium Conorum & Cylindrorum baſes & altitudines reciprocantur. 15 e 12.

Aſſumo, Figuram regularem infinitorum laterum, cui nec major inſcribi, nec minor circumſcribi poterit; ſi plana ſit, eſſe circulum; ſin ſolida, eſſe ſphæram.

Theorematum

Theorematum in Libris ARCHIMEDIS de Sphæra & Cylindro.

DECLARATIO.

DUODECIM primas propositiones, quia demonstrationibus negativis, quas ego ut parùm scientificas, quantum possum, evito, inque ipsarum loco affirmativas substituo, inserviunt, missas faciam.

I. In Cylindro recto, Si 2R, M, Latus; hoc est, 2AO, M, KA, $\div\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Cylindri.

Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\frac{\pi}{\delta}$ 2AO $\times$ KA. 13 l 1.

(Ad septem theoremata sequentia pertinet schema I.)

II. In Cono æquicruro KON, si KO, M, AO $\div\div$: Dico $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\cap$ Coni. Nam $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $=$ $\frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 14 l. 1,

III. In Cono æquicruro KON, Dico esse semid: basis. Latus :: Basis. $\frown$ Coni. Nam AO. KO :: $\frac{\pi}{\delta}$ AOq. $\frac{\pi}{\delta}$ AO in KO. 15 l 1.

IV. In Cono æquicruro KON, Si AO+Eω, M, Oω = KO − Kω ∺: Dico $\frown$ frustri OωνN = $(\frac{\pi}{\delta}Mq)\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω: × Oω. Nam per 2, $\frown$ OωνN = $\frac{\pi}{\delta}$: AO×KO: mi $\frac{\pi}{\delta}$: Eω×Kω: = $\frac{\pi}{\delta}$: AO+Eω : in: KO−Kω. Est enim AO+Eω in KO−Kω = AO × KO − Eω×Kω pl Eω×KO − AO×KO, quæ se invicem tollunt: Quia AO. Eω :: KO. Kω.

V. In Cono æquicruro KON, Si KO, M, AO ∺; & AP perpendicularis lateri KO: Dico $(\frac{\pi}{3\delta}Mq)$ $\frac{\varpi}{3\delta}$ AO×KO in AP = $\frac{\varpi}{3\delta}$ AOq in KA = KON. Nam: KA. AP :: KO. AO :: AO × KO. AOq. Ergo. 17 l 1.

VI. In Cono æquicruro KON, Si Kω.M.Eω ∺; & AP perpend: lateri KO: Dico $(\frac{\varpi}{3\delta}Mq)$ $\frac{\varpi}{3\delta}$ Eω ×Kω in AP = $\frac{\varpi}{3\delta}$ Eωq×KA, scil: rhombo KωAν. Nam KA. AP :: Kω. Eω :: Eω × Kω. Eωq. Ergo. 18 l 1.

VII. In Cono æquicruro KON, Dico frustum

Conicè

Conicè excavatum $O\omega A\nu N$, æquari Cono cujus basis est æqualis ◠ frusti $O\omega\nu N$, & altitudo AP : hoc est, con: KON − rhomb: $K\omega A\nu = \frac{\pi}{\delta}: AO + E\omega: \times O\omega$ in

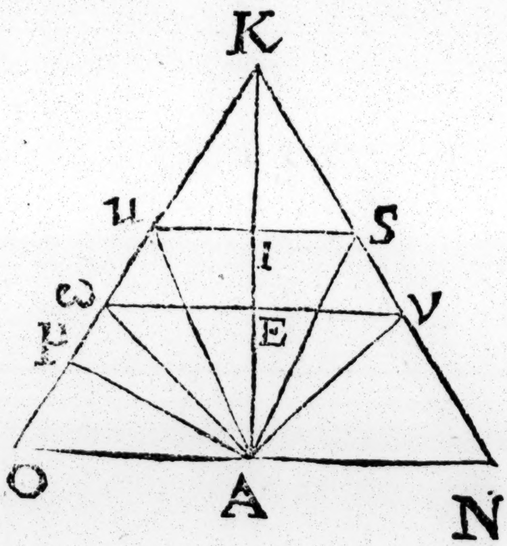
$\frac{1}{3}AP$. $\left.\begin{array}{l}\text{Nam } \frac{\pi}{\delta} AO \times KO \text{ in } \frac{1}{3}AP = KON, \text{ per } 5 \\ \text{Et } \frac{\pi}{\delta} E\omega \times K\omega \text{ in } \frac{1}{3}AP = \text{rhomb: } K\omega A\nu, \text{ per } 6\end{array}\right\}$ ho-

rum differentia est $\frac{\pi}{\delta} AO \times KO - \frac{\varpi}{\delta} E\omega \times K\omega$, per 4,

$= \frac{\varpi}{\delta}: AO + E\omega: \times O\omega =$ ◠ $O\omega A\nu$; ductis omnibus in

$\frac{1}{3}AP$. Ergo, &c.

VIII. In Cono æquicruro KON, Dico rhombum conicè excavatum $\omega UAS\nu$, æquari Cono cujus basis est æqualis ◠ frustri $\omega US\nu$ & altitudo AP: hoc est rhomb $K\omega A\nu$ - rhomb $KUAS = \frac{\varpi}{\delta}: E\omega + IU: \times \omega U$ in $\frac{1}{2}AP$. Nam



$\left.\begin{array}{l}\text{per } 6, \frac{\varpi}{\delta} E\omega \times K\omega \text{ in } \frac{1}{2}AP = \text{rhomb } K\omega A\nu \\ \text{Et } \frac{\varpi}{\delta} IU \times KU \text{ in } \frac{1}{3}AP = \text{rhomb } KUAS\end{array}\right\}$ horum

differentia est $\frac{\varpi}{\delta} E\omega \times K\omega - \frac{\varpi}{\delta} IU \times KU$, per 4, $= \frac{\varpi}{\delta}:$

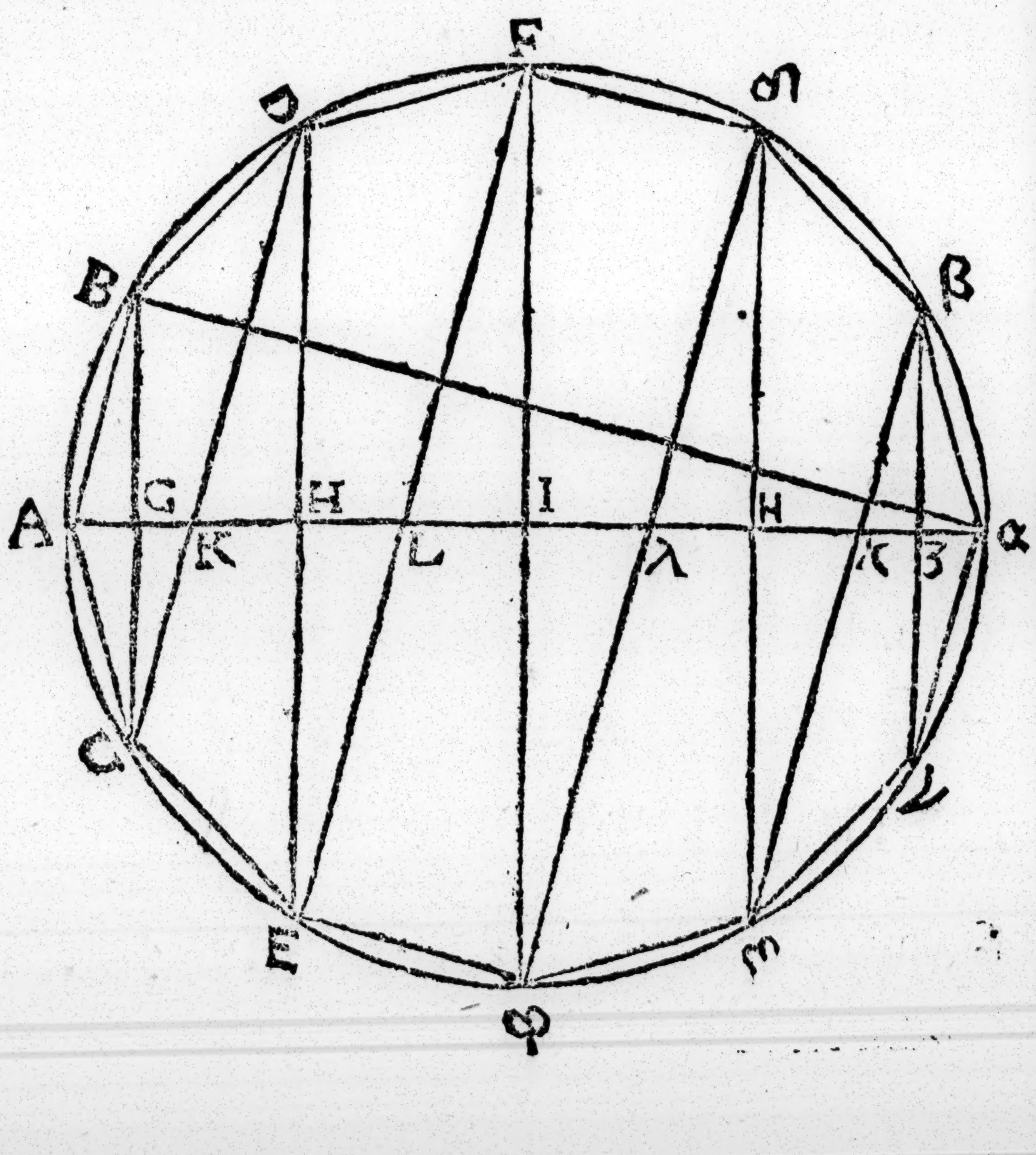
$I\omega$

$E\omega + Iu: \omega u = \cap \omega u S \nu$; ductis omnibus in $\frac{1}{2}$ AP. Ergo, &c.

IX. Si figura plana polygona laterum æqualium & numero parium. ABDF $\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi$EC, inscribatur circulo, junganturque anguli rectis lineis parallelis: Dico AB. $B\alpha$ :: $A\alpha$. BC+DE+Fφ+$\delta\varepsilon$+$\beta\gamma$; hoc est, 2BC +2DE+Fφ. Nam AB. $B\alpha$ :: $\frac{1}{2}$ BK. $\frac{1}{2}$BC :: $\frac{1}{2}$KL. $\frac{1}{2}$DE :: $\frac{1}{2}$Lλ. $\frac{1}{2}$Fφ :: $\frac{1}{2}\lambda\kappa$. $\frac{1}{2}\delta\varepsilon$ :: $\frac{1}{2}$ $\kappa\alpha$. $\frac{1}{2}\beta\gamma$.

Quare $A\alpha \times B\alpha$ = AB in 2BC+2DE+Fφ. 21 1 I.

Et in segmento $A\delta\varepsilon$, erit AB. $B\alpha$ :: $A\kappa$. BC+DE +Fφ+$\frac{1}{2}\delta\varepsilon$.



Quare $A\eta \times B\alpha =$ AB in $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\epsilon$.

X. Si circulo, vel circuli segmento alicui figura ejusmodi plano polygona laterum æqualium & parium, tum inscribatur, tum circumscribatur; & diametro $A\alpha$ quiescente, circulus circumvolvatur; describetur figura solida constans superficiebus quibusdam Conicis: Et paralleli BC, DE, $F\varphi$, $\delta\epsilon$, $\beta\gamma$, describent totidem circulos parallelos. Atque in his, quæ circumscripta est, sive continens, major semper est circulo incluso: & quæ inscripta est, minor semper erit circulo ambiente. Et superficies figuræ circumscriptæ, ad superficiem figuræ inscriptæ similis, est in ratione laterum duplicata: At figura ipsa solida circumscripta, ad solidam similem inscriptam, in ratione triplicata. 22. 27. 30. 34. 37 l 1.

XI. Si diameter circuli includentis ejusdemodi figuram solidam, sit $A\alpha$: fiatque $A\alpha, M, B\alpha \dot{\div}$: vel, quod idem est, per 9, $2BC + 2DE + F\varphi, M, AB \dot{\div}$: Dico $\frac{\pi}{\delta} Mq =$ superficiei figuræ. Nam per 2, $\frac{\pi}{\delta}$ $BC \times AB$

$= 2$ ◠ coni ABC: & per 4, $\frac{\pi}{\delta}$ $BC + DE$ in $A = 2$ ◠

frusti BCED: & $\frac{\pi}{\delta}$ $DE + F\varphi$ in $AB = 2$ ◠ frustri $DE\varphi F$.

Ergo $\frac{\pi}{\delta}$ $2BC + 2DE + F\varphi$ in $AB =$ ◠ figuræ totius, nempe $\frac{\pi}{\delta} Mq$. 23. 28 l 1.

XII. In Schem: 3. Figuræ ejusmodi solidæ, si

ſphæræ inſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$ Mq minor eſt circulo habente axem ſphæræ continentis $A\alpha$ pro diametro. Nam M $\sqsupset$ $A\alpha$.

Sin circumſcribatur, ſuperficies $\frac{\pi}{\delta}$ Mq major eſt circulo habente axem ſphæræ contentæ $2IP = B\alpha$ pro diametro. Nam $A\alpha$, M, 2I P ∺ : Quare M cadet inter A & Q. 24, 29 l 1.

XIII. Quidni igitur ſphæræ ſuperficies æquetur quatuor maximis circulis; nempe $\frac{\pi}{\delta}$ Diam: q ? 31 l 1.

XIV. Figura ejuſmodi ſolida equalis eſt Cono, cujus Baſis eſt circulus æqualis ſuperficiei figuræ; & Altitudo IP perpend: è centro ſphæræ in latus figuræ: hoc eſt, per 11, $\frac{\pi}{3\delta}$ Mq in (IP) $\frac{1}{2}B\alpha$ = figuræ toti ſolidæ. Nam per 6, Rhomb: BACI = $\frac{1}{3}$ ○ BAC in IP. Et per 8, Excavatum DBI CE = $\frac{1}{3}$ ○ DBCE in IP. Et per 7, Excavatum FDIEφ = $\frac{1}{3}$ ○ FDEφ in IP. Et ſimiliter pro altero hæmiſphærio. Quare $\frac{1}{3}$ ○ BAC + $\frac{1}{3}$ ○ DBCE + $\frac{1}{3}$ ○ FDEφ in $B\alpha$ (2IP) = toti figuræ ſolidæ; nempe $\frac{\pi}{3\delta}$ Mq: vel $\frac{\pi}{3\delta}$ $A\alpha \times B\alpha$ in $\frac{1}{2}$ BA (IP). 25, 29 l 1.

XV. Figura ejuſmodi, ſi ſphæræ inſcribatur, minor eſt quatuor Conis habentibus baſem æqualem circulo ſphæræ maximo: hoc eſt Cono habenti baſem æqualem ſuperficiei ſphæræ; altitudinem verò æqualem ſemiaxi. Sin circumſcribatur, iiſdem major eſt.

Nam

Nam per 12, superficies figuræ inscriptæ, superficie sphæræ minor est: circumscriptę autem, major. 26. 29 l 1.

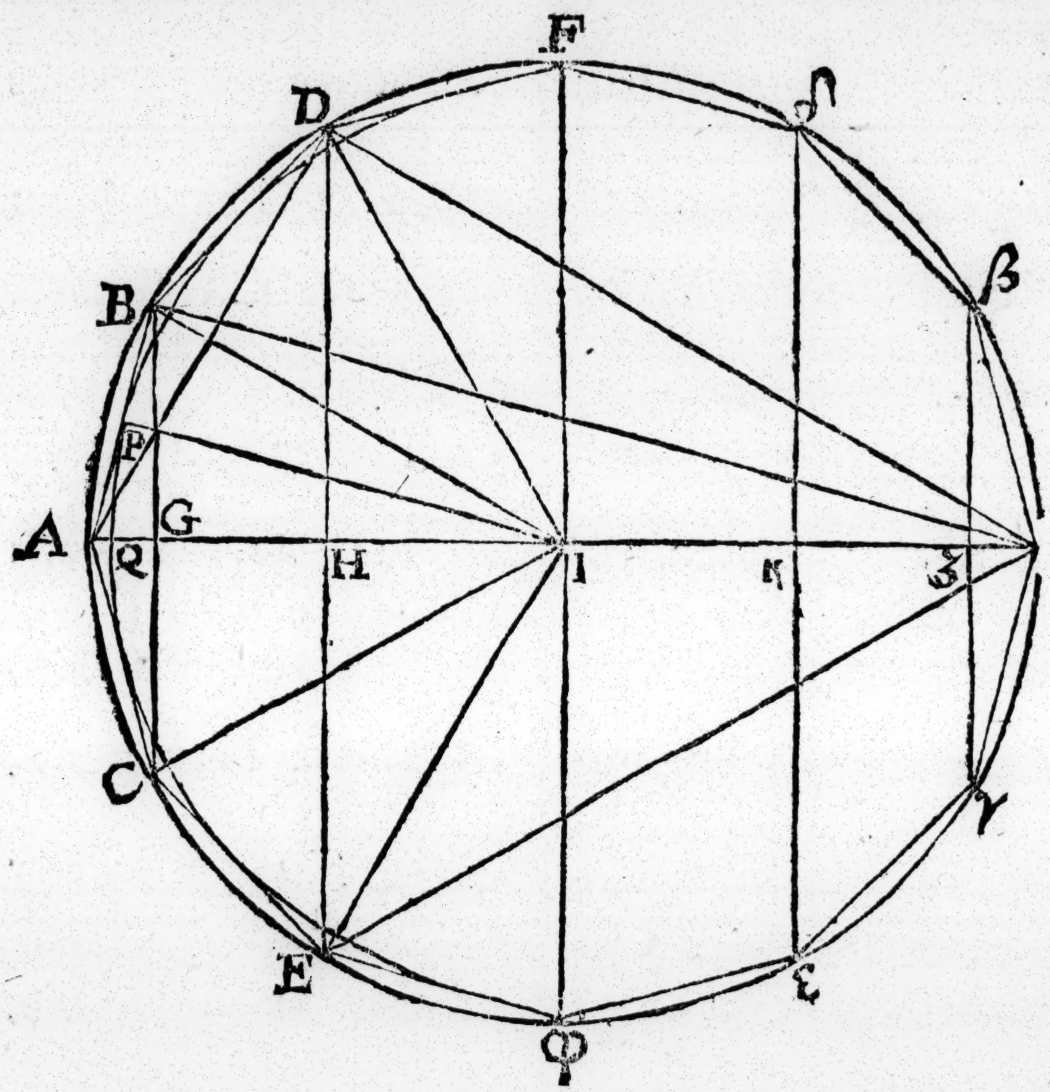
XVI. Quidni igitur ipsa sphæra æqualis sit quatuor Conis habentibus basem æqualem circulo sphæræ maximo; hoc est Cono habenti basem æqualem superficiei sphæræ; Altitudinem verò æqualem semiaxi? 32 l 1.

Consect. $\frac{2}{3}$ Cylind: = Sphæræ = 2 Conis. Nam $\frac{\pi}{3\delta} Rq \times 4R =$ Sphæræ. Et $\frac{\varpi}{\delta} Rq \times 2R =$ Cylindro. $\frac{\varpi}{3\delta} Rq \times 2R =$ Cono.

XVII. Si figura ejusmodi sive inscribatur, sive circumscribatur, segmento sphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, cujus basis sit $\delta\varepsilon$; altitudo $A\nu$; sitque $B\alpha$, M, $A\nu$ ∺: vel, quod idem est, per 9, $BC + DE + F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$, M, AB ∺: Dico $\frac{\varpi}{\delta} Mq =$ superficiei figuræ illius mancæ. Nam per 2, $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2} BC$ in $AB = \frown ABC$. Et per 4, $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} DE$ in $AB = \frown DBCE$: Et $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2} DE + \frac{1}{2} F\varphi$ in $AB = \frown FDE\varphi$. Et $\frac{\varpi}{\delta}\frac{1}{2} F\varphi + \frac{1}{2}\delta\varepsilon$ in $AB = \frown \delta F\varphi\varepsilon$. Ergo 33. 37 l 1.

XVIII. Figuræ ejusmodi mancæ, si segmento sphæræ, puta $A\delta\varepsilon$, inscribatur, superficies $\frac{\varpi}{\delta} Mq \sqsubset \frac{\pi}{\delta} A\delta q$. Nam $A\delta q = A\alpha \times A\nu \sqsubset B\alpha \times A\nu$.

Sin circumscribatur, superficies $\frac{\pi}{\delta}$ Mq $\sqsubset$ $\frac{\pi}{\delta}$ Aδq. Nam Bα = 2IQ est diameter sphæræ interioris sive contentæ. Estque Aη $\sqsubset$ Qη. Quare $\frac{1}{2}$ M protenditur ultra IQ diametrum sphæræ contentæ. 35.38.41 l 1.



XIX. Quidni igitur ipsa superficies segmenti sphæræ æqualis sit circulo, cujus semidiameter est recta ducta a vertice segmenti in finem basis? 40 l 1.

XX. Figura ejusmodi manca, sive inscribatur segmento sphæræ, puta DAE minori semicirculo, vel DαE majori, æqualis est Cono habenti basem æqualem superficiei illius figuræ mancæ; altitudinem

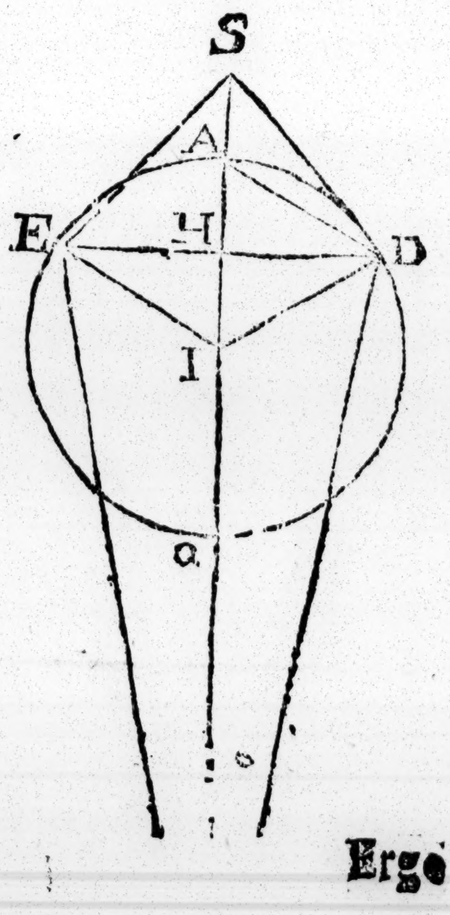
verò

verò æqualem perpend: IP è centro in latus figuræ, adjecto vel ablato Cono DIE medio; hoc eſt, toti ſolido DBA CEI, vel reliquo DF$\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi$EI. Nam in ſolido minore DBA=CEI, per 6, Rhomb: βACI $= \frac{1}{3}$ ∩ βAC in IP. Et per 8, $\frac{1}{3}$ ∩ DBCE in IP = excavato DBICE, Ergo. Et ſimiliter de majore DF $\delta\beta\alpha\gamma\varepsilon\varphi$ EI. 36, 39 l 1.

Conſect. Quare & per 18, Si figura ejuſmodi ſegmento ſphæræ, puta DAE, vel DαE, inſcribatur, totum ſolidum minus eſt Dono, cujus baſis eſt circulus a ſemidiametro AD, vel αD; & altitudo ſemiaxis IA.

XXI. Quidni igitur Sector ſphæræ DBACEI, æqualis ſit Cono $\frac{\pi}{3\delta}$ DAq in IA; & reliquus Dα= EI, æqualis Cono $\frac{\varpi}{3\delta}$ αDq in IA? 42 l 1.

XXII. Si fiat Hα. Hα+Iα :: HA. HS: Dico $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq in HS = ſegm: ſphæræ DAE Nam Hα. HA:: Hα + IA − Hα. HS − HA:: Iα. AS. Eſſque (Iα + AS) IS. IA:: (Hα + HA) Aα. Hα :: Aαq. αDq:: ADq. DHq. Quare $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq × IS = $\frac{\varpi}{3\delta}$ ADq × IA = ſegmento DAE + (Cono DIE) $\frac{\pi}{3\delta}$ DHq×IH.



Ergo

Ergo $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq×HS (IS−IH) = ſegmento DAE.

Conſectarium. Quia $\frac{HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha}$ = HS: Erit

$\frac{\varpi}{3\delta}\ \frac{DHq \times HA \text{ in } H\alpha + I\alpha}{H\alpha}$ = ſegmento DAE. Quare

Hα. Hα + Iα :: $\frac{\varpi}{3\delta}$ DHq×HA. ſegm: DAE.

2 1 2.

FINIS.

HOROLOGIA SCIOTERICA IN PLANO,

Geometricè delineandi Modus.

Cap. I.

De Planis.

IN Hypothesin illam Astronomicam, quòd Terra nullius quantitatis sensibilis cum Sphæra Solari comparata, sed tanquam Punctum, habeatur: Ars Horologiographica præcipuè innititur. Planum enim in quo describitur Horologium, supponitur Parallelum majori alicui Circulo Cœlesti, qui tantùm à Plano distat quantum ab eodem Plano punctum aliquod pro Apice styli assignatum.

In Plano; primo considerandus erit Situs, qui est vel respectu Horizontis, vel Meridiani.

Respectu Horizontis; Planum est vel Parallelum, (& huic inscriptum Horologium, *Horizontale* vocatur;) vel Perpendiculare, (cujus generis sunt Muri omnes erecti;) vel Obliquum; quod rursus, vel *Pronâ* facie nutat, & vocatur *Inclinans*; vel Declivi & supinâ superficie residit, & vocatur *Reclinans*.

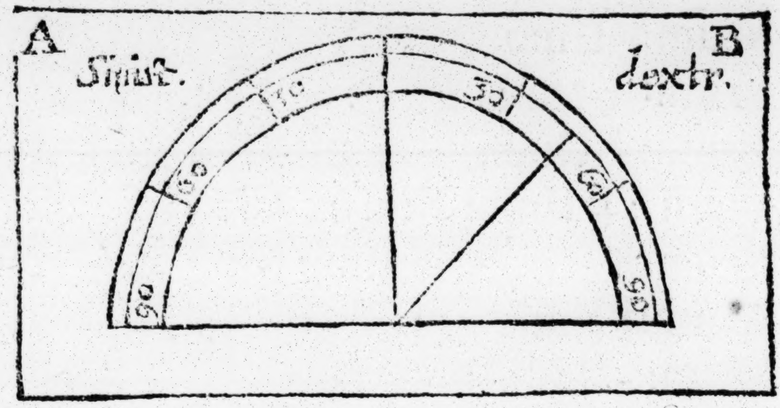
Inclinationis ista & Reclinationis Obliquitas, per arcum alicujus *Azumith* (sive Circuli Verticalis) inter Loci Verticem & *Planum* intercepti mensuratur, quod quidem Azumith Plano Perpendiculare est, & Quadrantis ope, in 90 Gr: divisi, facillimè invenitur.

Respectu Meridiani; Planum est vel Directum; vel Declinans. Planum Directum est, quod Punctum aliquod è quatuor Cardinalibus directè respicit: Estque, vel Meridiano Perpendiculare, qualia sunt plana Meridionalia & Borealia: vel Parallelum, qualia sunt Orientalia & Occidentalia. Planum Declinans est, quod non directè Puncto alicui Cardinali opponitur; sed à Meridie aut Septentrione, versus Orientem aut Occidentem, declinat.

Declinatio plani est Arcus Horizontis, inter Sectionem plani horizontalem, & punctum Orientis vel Occidentis, interceptus; Vel, est Arcus Horizontis, qui inter Meridianum & Polum Sectionis Horizontalis intercipitur.

Investigatio Declinationis Plani cujusque aut Muri difficilior aliquantum. Tutissimam viam arbitror (quoniam Acus Magnetica facilè distrahitur) esse per Tabulam Rectangulam, uncias fere duodecim longam, latam 6; Cui Semicirculus à medio utrinque in

in 90 gradus diviſus inſcribitur, ſtylúſque à Centro erigitur, ut in Schemate ſubjecto videre eſt.



Uſus hujus Inſtrumenti talis eſt. Quolibet die (datâ priùs Declinatione Solis) ante decimam Horam AM (i. e. ante Meridiem) vel poſt ſecundam PM (i. e. poſt Meridiem) applicetur Muro Latus Inſtrumenti AB, ita ut Horizonti maneat Parallelum, & quem Gradum Styli umbra vel in Dextro vel Siniſtro Quadrante notet obſerves, quam idcirco [*Umb: Dextr:*] vel [*Umb: Siniſtr:*] voco: Deinde quàm citiſſimè Solis *A*ltitudinem inquiras. Jámque Solis, tam à Polo Boreali, quàm à Vertice, Diſtantiam, ſimulque *A*ltitudinis Poli Complementum, adeptus; quære (aut ex *A*nalemmate, aut Projectione Horizontali, vel tandem Trigonometricè) *A*zumithalem Solis à Meridie diſtantiam. *D*enique, cum Tempore *D*iei, Solis Azumith, Stylíque Umbrâ. Tabellam ſequentem pete; &, facto quod ibi faciendum præcipitur, verum Muri ſitum habebis.

AM.	Azum: - Umb: Sin:	A Meridie in Ortum.
AM.	Azum: + Umb: Dext:	
PM.	Umb: Dext: - Azum:	
AM.	Umb: Sin: - Azum:	A Meridie in Occas.
PM.	Azum: + Umb: Sin:	
PM.	Azum: - Umb: Dext:	
AM.	Azum: + Umb: Dext: ex 180	A Septentrione in Ortum.
PM.	Azum: + Umb: Sin: mi: 180	
PM.	Azum: + Umb: Sin: ex 180	A Septentrione in Occasum.
AM.	Azum: + Umb: Dex: mi: 180	
AM.	Azum: + Umb: Sin: = 90	In Ortu.
AM.	Azum: - Umb: Dex: = 90	
PM.	Azum: - Umb: Sin: = 90	In Occasu.
PM.	Azum: + Umb: Dex: = 90	
	Azum: - Umbra = 0.	In Septentr:
	Azum: + Umbra = 180.	In Meridie.

Exempli gratia. Julii 15 post Meridiem, inveni Umbram in Gradu 30 Dextri Quadrantis; Solem vero altum 23 grad: & gradum ferè 20^{um} Declinationis Borealis attingentem; unde Azumith erat, gr: 91$\frac{1}{2}$. At in Tabula [P M. Azum: - Umb: Dex:] est à Meridie in Occasum: quocirca 91$\frac{1}{2}$-30, i. e. 61$\frac{1}{2}$ est Declinatio Muri Meridionalis in Occasum vergentis.

Rursus; Eodem Julii 15^{o} post Meridiem, inveni Umbram in 57 Gr: Sinistri Quadrantis; & Altitud: Solis 22 $\frac{1}{10}$: Unde Azumith erat graduum 93. At [PM Azum: + Umb: Sin: ex 180] est à Septentrione in Occasum. Ergo 93+57 ex 180, id est, 30 gr: est

eſt Muri Borealis in Occaſum vergentis Declinatio.

Prout Horizontem, Meridianumve, reſpicit murus aut Planum, ita Nomen ſuum quod in eo deſcribitur Horologium ſortitur; veluti, ſi Planum Reclinans, Declinet etiam à Meridie in Ortum, ejuſdem Horologium dicitur Meridionale Reclinans Declinans in Ortum.

Cap. II.

Linearum, quæ in deſcribendis Scioтericis præcipue uſui ſunt, Declaratio.

1. Lineæ Horariæ, ſunt interſectiones Circulorum Horariorum cum Plano Scioterici.

2. E Lineis Horariis, Principalis eſt Meridiana, ſeu Linea horæ duodecimæ, quæ eſt ipſa interſectio à plano Meridiani loci cum plano Scioterico facta. Et, ab hâc, Linearum Horar: diviſio principium ducit.

3. Circulorum Horariorum plana omnia in planum Æquinoctiale perpendiculariter cadunt, dividuntque æqualiter in 24 partes, per lineas rectas quæ ſunt Lineæ Horarum in Æquinoctiali; at cætera plana omnia dividunt inæqualiter. Circulorum autem Horariorum communis Interſectio in Polis eſt & Axe Mundi ſive Æquinoctialis.

4. Horologii Stylus (lineam illam intelligo à qua Umbra projicitur) Axis Mundi ſegmentum eſſe ſupponitur; ideóque ita ſemper locandus eſt, ut extre-

mitatibus suis exactè Mundi Polos respiciat, extremitate sc: superiori polum apparentem & inferiori occultum.

5. Quare, si planum intersecet mundi *A*xin, Sciotericum in eo descriptum Centrum habebit, è quo Lineæ omnes Horariæ ducuntur: At si Planum Axi Parallelum sit, non habebit Centrum sed Lineæ omnes Horariæ erunt tum Stylo tum sibi invicem parallelæ.

6. Substylaris est Linea Plani Stylo proxima, cui Stylus perpendiculariter imminet; est enim Meridianus Loci illius in Terra, cui Planum est Horizontale; in Ortum à subjecto Loco elongati, si Substylaris inter Horas Matutinas cadat; at in Occasum, si inter Pomeridianas: Differentia Longitudinum, est Arcus Æquinoctialis inter Substylarem & Meridianum Æquinoctialis interceptus.

7. Elevatio Poli supra *P*lanum Scioterici, est Angulus quem Stylus constituit cum Substylari.

8. Est alia insuper Linea insignioris usus, Intersectio scilicet Plani Æquinoctialis cum Plano Horologii; vulgò *Linea Contingens*, quoniam in eâ solâ Lineæ Horariæ Scioterici, Lineæque Horariæ Æquinoctialis sese mutuò intersecant; Et, quoniam Centrum Æquinoctialis in ipso Axi est, ejusmodi Linea Substylarem ad rectos angulos secat.

9. In Planis omnibus Australibus, Polus Australis elevatur; in Borealibus, Borealis: duobus tantum Casibus exceptis, ut suo Loco dicetur, in quibus Polus oppositus elevatur; ideoque Substylaris & Stylus inventus trans Centrum in oppositam Partem protrahendus erit.

10. Scioterici Delineatio tribus diſtinctis Operationibus perficitur; hoc Ordine: Prima eſt, Meridianam, Subſtylarem, & Stylum, debitis Locis inſcribere. Secunda eſt, Lineam Contingentem ducere; & Æquinoctialem, cum Meridiana, Lineíſque ejus Horariis, ad Contingentem uſque protrahere. Tertia eſt ipſas Scioterici Lineas Horarias deſcribere, & Numeris propriis notare.

11. Eadem Meridianæ, Subſtylaris, & Styli Inſcriptio duobus aliquando diverſi Generis Sciotericis inſervit: ſcilicet, vel Chartam cui inſcribuntur ſurſum vorſum invertendo, ut in directè Septentrionalibus aut Auſtralibus; vel faciem averſam ejus oſtendendo ut in Orientalibus aut Occidentalibus Erectis. Aliquando etiam quatuor Generis inſervit; tam Anteriorem quam Averſam faciem Invertendo.

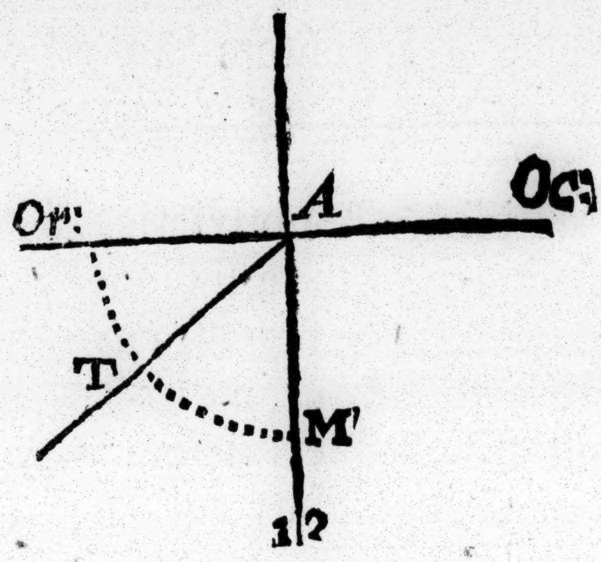
Cap. III.

De Scioterico Horizontali.

1. IN Plano Horizontali, Meridianus, ſeu Linea Duodecimæ, à Septentrione in Meridiem exactè ducit r; ideoque Meridiano Loci ſubeſt: Eadem quoque Subſtylaris eſt: & Angulus Styli ſupra eam inclinati, æqualis eſt Elevationi Polari, ſeu Latitudini, Loci.

2. Ut delineetur igitur, Duc in Plano Lineam Ortum & Occaſum directè indicantem; hanc in Puncto A, circa medium, ſecet perpendicularis AM;

quæ ſimul & Meridiana & Subſtylaris erit ; Punctum autem A Centrum erit Scioterici ; & Linea Prima *Or. Oc.* Hora 6ta.



Pedem circini in puncto A fige, & altero pede ad quodvis Meridianæ latus Quadrentem deſcribe ; in quo, à Merdianâ incipiens, arcum MT Altitudini Polari æqualem numera ; &, per terminum ejuſdem, è Centro A, Lineam AT producito, quæ Stylum dabit.

Cap. IV.

De omnimodis Sciontericis directè Septentrionalibus, aut Auſtralibus ; ſive Erecta ſint, ſive Obliqua.

1. IN Planis omnibus directè Septentrionalibus aut Auſtralibus, tam erectis quam obliquis, Meridiana

ridiana in Lineam Horizonti parallelam perpendiculariter cadit; Eadémque Subſtylaris eſt.

2. Si Planum Erectum ſit, Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Elevationis Polaris.

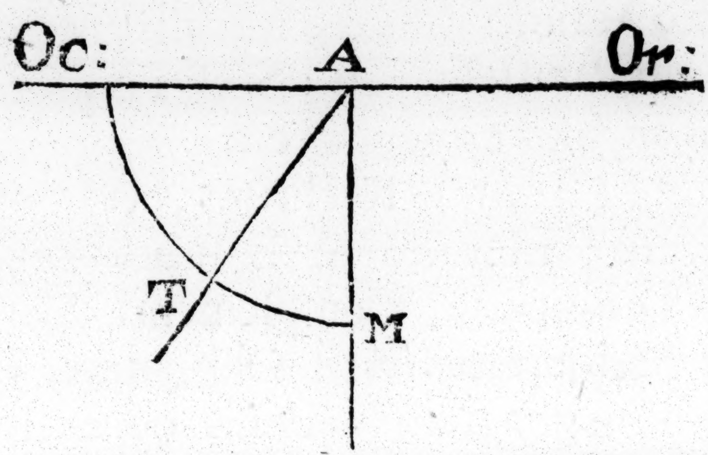
3. Si Planum ſit Auſtrale Inclinans, vel Septentrionale Reclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, æqualis eſt Complemento Altitudinis Polaris, & Obliquitati, ſimul ſumptis. At ſi Obliquitas Altitudini Polari major ſit, tum Angulus Elevationis Styli erit Recto Major: Si verò æqualis fuerit, Planum æquinoctiali Parallelum eſt; Stylus ergo è Centro A ad rectos angulos erigendus eſt.

4. Si Planum ſit Auſtrale Reclinans, vel Septentrionale Inclinans; Elevatio Styli ſupra Subſtylarem, qualis eſt Differentiæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis. At ſi Obliquitas, Complemento Polari, major fuerit; Polus oppoſitus elevatur, (qui unus eſt è caſibus antea memoratis *Cap.* 2. *Sect.* 9.) Si verò Obliquitas, Complemento Polari, æqualis fuerit; Planum Axi parallelum eſt: ideóque Sciotericon in eo deſcriptum Centro carebit; uti dictum eſt *Cap.* 2. *Sect.* 5.

5. Ad delineandum igitur quodvis hujus generis Sciotericon, ducatur primùm in Plano Linea Horizonti parallela (quæ ſimul in Ortum & Occaſum dirigitur:) Hæc circa medium in Puncto A ſecetur à Perpendiculari AM, quæ & Meridiana & Subſtylaris erit; Punctum autem A Sciioterici Centrum erit, (ſi ſaltem Centrale fuerit,) & linea illa prima *Or. Oc.* Hora VIta modò omnino reperiatur. *P*ede circini

in

in puncto A fixo, ad quodvis Meridianæ latus, pede altero Quadrantem deſcribe,(infra lineam *Or. Oc.* in *A*uſtralibus Planis, ſupra verò in Septentrionalibus; & in hoc Quadrante, à Meridianâ, numera arcum MT, æqualem Elevationi Styli ſupra Subſtylarem, (per 2am, 3am, 4am Sectionem inventæ;) Et è Centro A, per Terminum ejuſdem, duc Lineam AT Styli futuri; ut in Schemate præcedenti tranſpoſitis ſolum Literis *Or. Oc.*



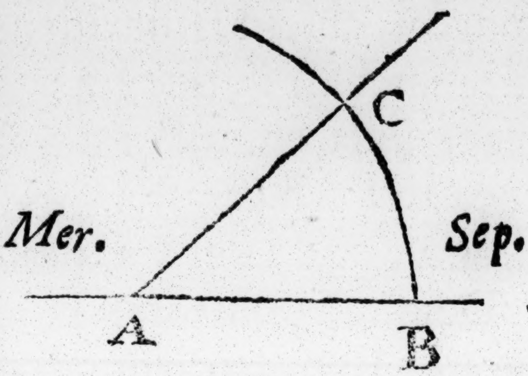
Cap. V.

De Scioterícis, Directè Orientalibus & Occidentalibus, Erectis.

IN directè Orientalibus & Occidentalibus Erectis; nec Centrum eſt nec Meridiana, cùm Planum hujuſmodi plano Meridiani parallelum ſit: Sed Subſtylaris in lineam Horizonti parallelam, ad angulum *A*ltitudini Polari æqualem, inſiſtit, Septentrionem ſupernè indicantem: *S*tylus autem ei parallelus imminet.

Ad

Ad Sciotericum igitur hujusmodi delineandum, ducatur in Plano linea Horizonti parallela, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Et Centro A, prope Meridionalem extremitatem electo, Quadrantem versus Borealem describe; In quo arcum BC Altitudini Polari æqualem designans, Lineam AC Substylarem extende.



Cap. VI.

In Planis, directè Orientalibus & Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. Primo, Ducatur in plano Meridiani, linea Horizonti parallela AB, notatis extremitatibus ejus ad Boream & Meridiem. Hæc circa medium secetur à perpendiculari AC: Punctúmque A Centrum erit. Pedum altero circini ad punctum A fixo, altero ad Lineam AC Diametri extenso, Quadrantem describe, (infra Lineam primam, AB, versus Meridiem, si Planum inclinet; suprà verò ad Boream, si reclinet:) Et, à Diametro AC incipiens, numera in Quadrante congruo tam Obliquitatem, quàm Altitudinis Polaris Complementum; Et, per Arcuum extremitates, è Centro A, Binæ producantur lineæ; quarum una vocetur, Linea *Obliquitatis*; altera, Linea *Polaris*: Deinde

Deinde lineâ primâ AB, è regione Quadrantis congrui, abſcindatur idoneum ſegmentum AB: &, per punctum B, duc lineam Diametro parallelam, lineam Polarem in P intercipientem. Quarta denique lineâ ipſi AB parallelâ, Lineámque Obliquitatis in O ſecante, claudatur Parallelogrammum ABP C.

Deinde, ponatur AK = AO = BL, verſus CP; & ducatur linea Horizontalis KL.

Poſtremò, ſuper Lineam Obliquitatis AO, menſuretur AN = CO, & ducatur NR ipſi AB parallela, deinde ſuper LB verſus B, ponatur LS = NR. Producatur AS pro ſubſtylari; in quâ, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST = AR: &, pro Stylo, producatur T, Subſtylari ad Angulum SAT inſiſtens.

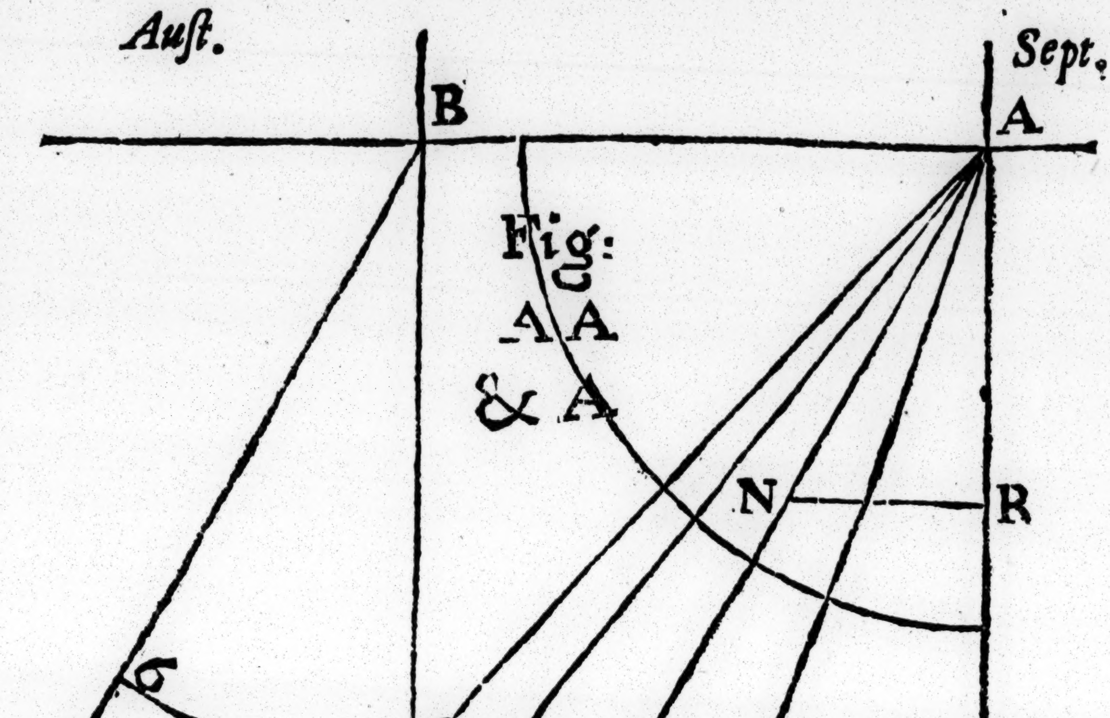
Exemplum Scioterici in Plano Directo Orientali, Inclinante grad. 30. *Vide in Figura* A.

Demonſtratio. Protrahe Lineas AC & BP ad uſq; κ & λ, addendo illis Longitudinem ipſius CO. Conſtitue dein Triang: Rectang: BPλ = ACO: Et, Plano in Lineis Bλ. Pλ. diſſecto, plicentur Lineæ CP & BP ad rectos angulos, (Antrorſum quidem pro Inclinantibus, Retrorſum pro Reclinantibus Planis,) adeo ut punctum λ in Triangulo, & alterum λ in linea Pλ coincidant: adeoque Plana ACBP, & BPλ in Planum Horizontale PCκλ ad Rectos Angulos inſiſtent: Atque, in hoc ſitu, quatuor cogitanda ſunt Plana; Planum ſc. Horizontale PCκλ, Planum Erectum ACPB (quod Meridiani Planum eſt,) & Planum Obliquum ABλκ = ABLK Plano Declinationis, quoniam Bλ = BL. Jam, ſi a Puncto P ducatur Linea Pσ, perpendicularis Hypotenuſæ Pλ Rectang: Triang:

APλ:

Ori entale Directum Inclinans gr. 30.

Si linea $\varkappa\lambda$ & triangulum BPλ desiut, erit Figura A.



APλ: patet, quòd linea imaginaria AC, Subſtylaris erit Plani Obliqui; &, quòd illi reſpondeat AS, in Plano Delineationis: quódque Altitudo Styli, in Puncto σ, ſit Pσ=AR=ST. Nam Triang: Rectang: Pσλ=ANR, quoniam Hypotenuſam Pλ=AN; & Angulus BλP=ANR, eſt Complementum Obliquitatis. *Demonſtrationi inſervit Figura* AA.

Cap. VII.

In Planis Auſtralibus aut Septentrionalibus Erectis, Declinantibus in Ortum aut Occaſum, Meridianam, Subſtylarem, & ſtylum inſcribere.

1. DUcatur primò Linea Horizonti Parallela AB. Diſtinguantur etiam extremitates ejuſdem ſeu Plagæ ad Ortum & Occaſum. Secetur autem in Puncto A, circa medium, à Perpendiculari AC, quæ Meridiana erit; Punctum A verò Centrum Scioterici.

Circini pedum altero in Centro A fixo, & altero ad AC tanquam Diametrum extenſo, ſemicirculum à plagâ Declinationi contrariâ deſcribe. In cujus quadrante (inferiori, ſi Meridionale ſit Planum; ſuperiori verò, ſi Septentrionale,) tam Declinationem, quam Complementum Elevationis Polaris, ab AC Diametro incipiens, numera: &, per arcuum duorum extremitates, binæ è Centro lineæ producantur, quarum una vocetur Linea *Declinationis*, altera *Polaris*. Deinde in Linea prima AB, verſus Semicirculum, ſegmentum abſcinde congruum AB: & à Puncto B producatur

producatur linea Diametro parallela, lineam Polarem in P secans: quartà denique lineâ PC, ipsi AB parallelâ, claudatur Parallelogrammum ABPC. Jam, super Lineam Declinationis, aptetur AD = AB; pérque D, ducatur etiam FDE Diametro Parallela, Lineam AB in F, PC in E, secans.

Postremò, pro Substylari producatur AE, super punctum verò E, ad rectos angulos, erigatur ET = DF; &, pro Stylo, ducatur AT, Substylari ad Angulum EAT insistens.

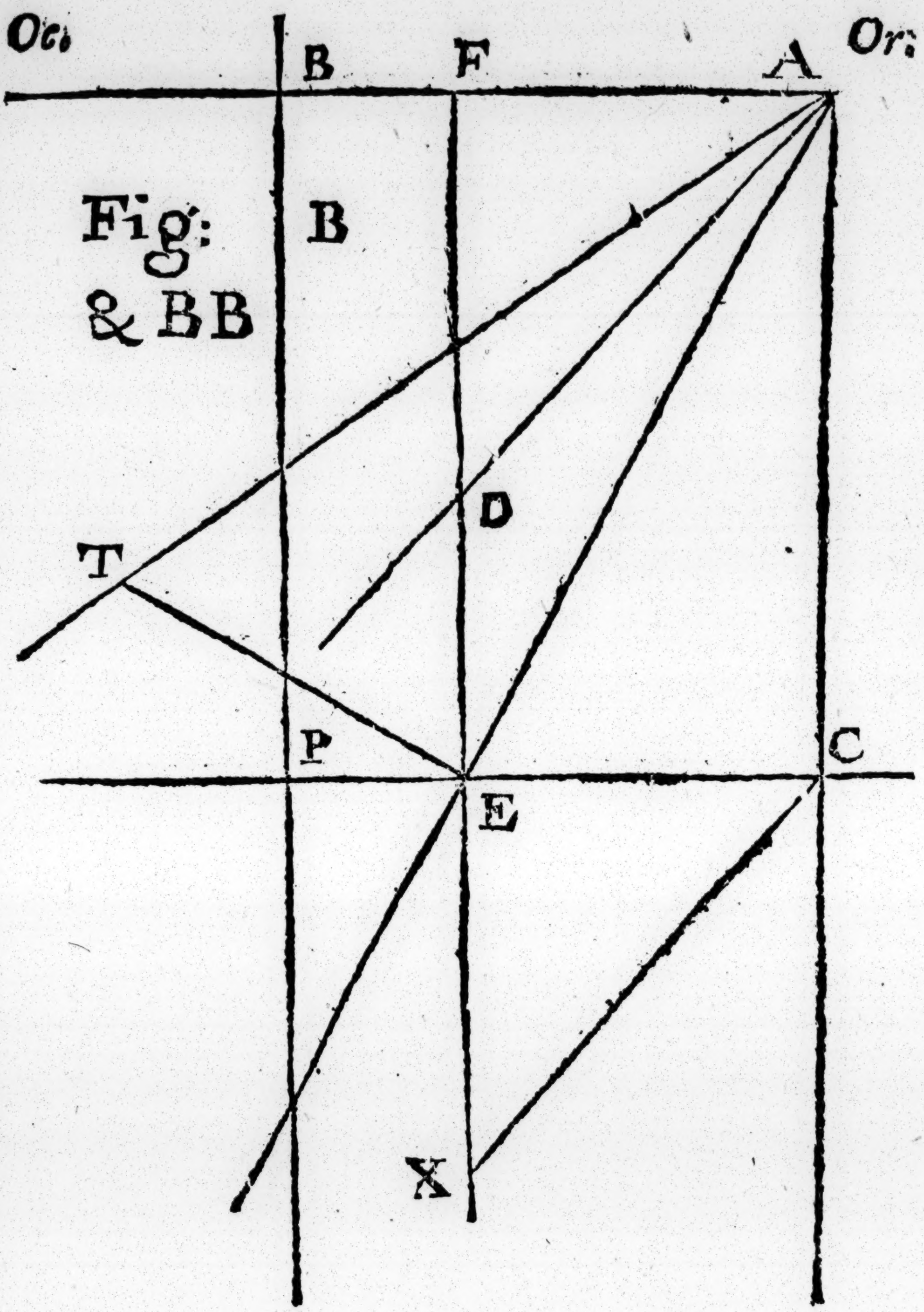
Exemplum Scioterici in Plano Australi erecto, Declinante in Ortum gr: 42. 30'. Vide in Figura B. **Ubi tamen, cœlantis incuriâ, deest linea AP.**

2. Demonstratio. Si parallelogrammo ACEF, adjiciatur Triangulnm CEX = AFD, tanquam in plano Horizontali in quod Parallelogrammum ACEF ad Rectos Angulos insistere supponitur, (plicato nempe in *L*inea CP Plano,) perspicuè patet Rectangulum Triangulum ACX = ACP esse Gnomonem seu Stylum Horizontalem, *L*ineam vero CX Meridianam Plani Horizontalis, Stylumque AX Mundi Axin, & Rectangulum Triangulum AET = AEX Gnomon erecti Plani. *Demonstrationi inservit Figura* BB.

3. Notandum est, quod in Planis omnibus Declinantibus, quamvis etiam obliqua sint, semper incipiendum erit ab ejusmodi Figurâ, AFDECX (uti jam præceptum est,) secundum Declinationem, Muri Planive dati, delineatà; cui addenda est etiam DG ipsi AF Parallela, erit ergo AG = XE. Quod semel monitum sufficiat.

CAP.

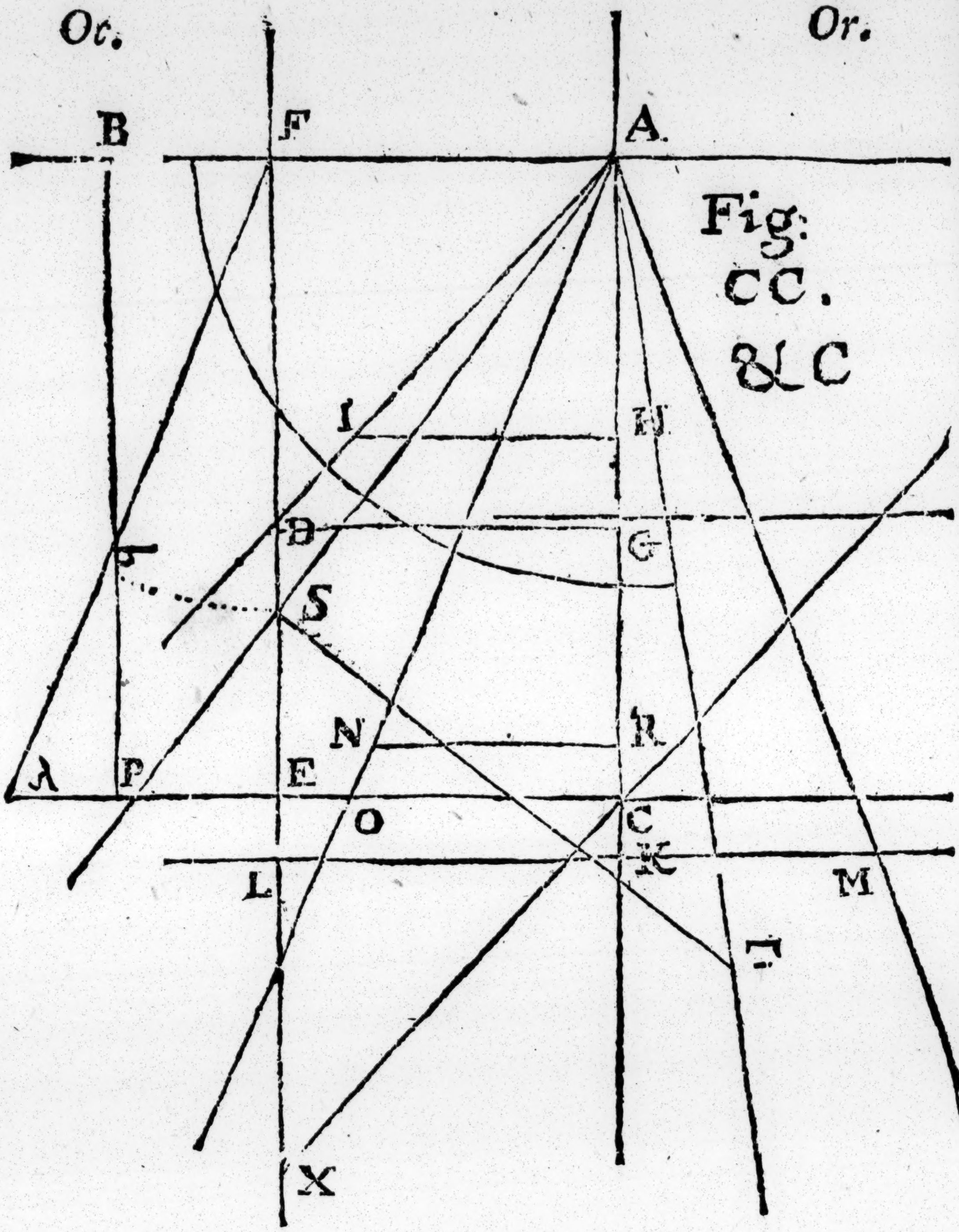
Meridionale erectum, Declinans versus Orientem.



Si omittatur linea CX, erit Figura B.

Septentrionale erectum, Declinans versus Orientem.

Meridionale, Declinans versus Orientem gr: 42½. & Inclinans gr: 24.



Septentrionale, Declinans versus Orientem, & Reclinans.

Cap. VIII.

In Planis Australibus Decilnantibus & Inclinantibus, vel Septentrionalibus Declinantibus & Reclinantibus, Meridianam, Substylarem, & Stylum inscribere.

1. DElineetur (ut prius *Cap. VII. Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX, ad datam Declinationem. Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in Semicirculo numera; ductâq; Obliquitatis Lineâ AO, ponatur AK = AO = FL versus CE; & producatur Linea Horizontalis LK.

Sumatur AH = CO; ductâque HI ipsi AB parallela, abscindatur à Linea Horizontali KM = HI ad alterum Diametri latus: & pro Meridiano ducatur AM.

Postremò, Super Lineam Obliquitatis AO, mensuretur AN = AG+AH: & ducatur NR ipsi AB parallela: tum, super Lineam LF versus F, ponatur LS = NR, & protrahatur pro Substylari AS: à Puncto autem S, ad rectos Angulos, erigatur ST = AR: &, pro Stylo, producatur AT, Substylari ad angulum SAT insistens.

Exemplum Scioterici in Plano Australi, Declinanti in Ortum 42°, 30′; *& Inclinanti* 24°, 0′. *Vide in Figura* C.

Cap. IX.

In Planis Meridionalibus Declinantibus & Reclinantibus vel Septentrionalibus Declinantibus & Inclinantibus, Meridianam, Substylarem & Stylum inscribere.

1 DElineetur ad Datum Declinationem (uti prius *Cap.*7. *Sect.* 3. præmonitum est) Figura AFDECX.

Deinde, à Diametro AC incipiens, Plani Obliquitatem in semicirculo numera; &, ductâ Lineâ Obliquitatis AO, ponatur AK = AO = FL, versus CE; & ducatur Linea Horizontalis KL.

Deinde mensuretur AH = CO: &, ductâ HI ipsi AB parallelâ, sumatur in Linea Horizontali KM = HI, & ad idem Diametri Latus; & ducatur, pro Meridiano, AM.

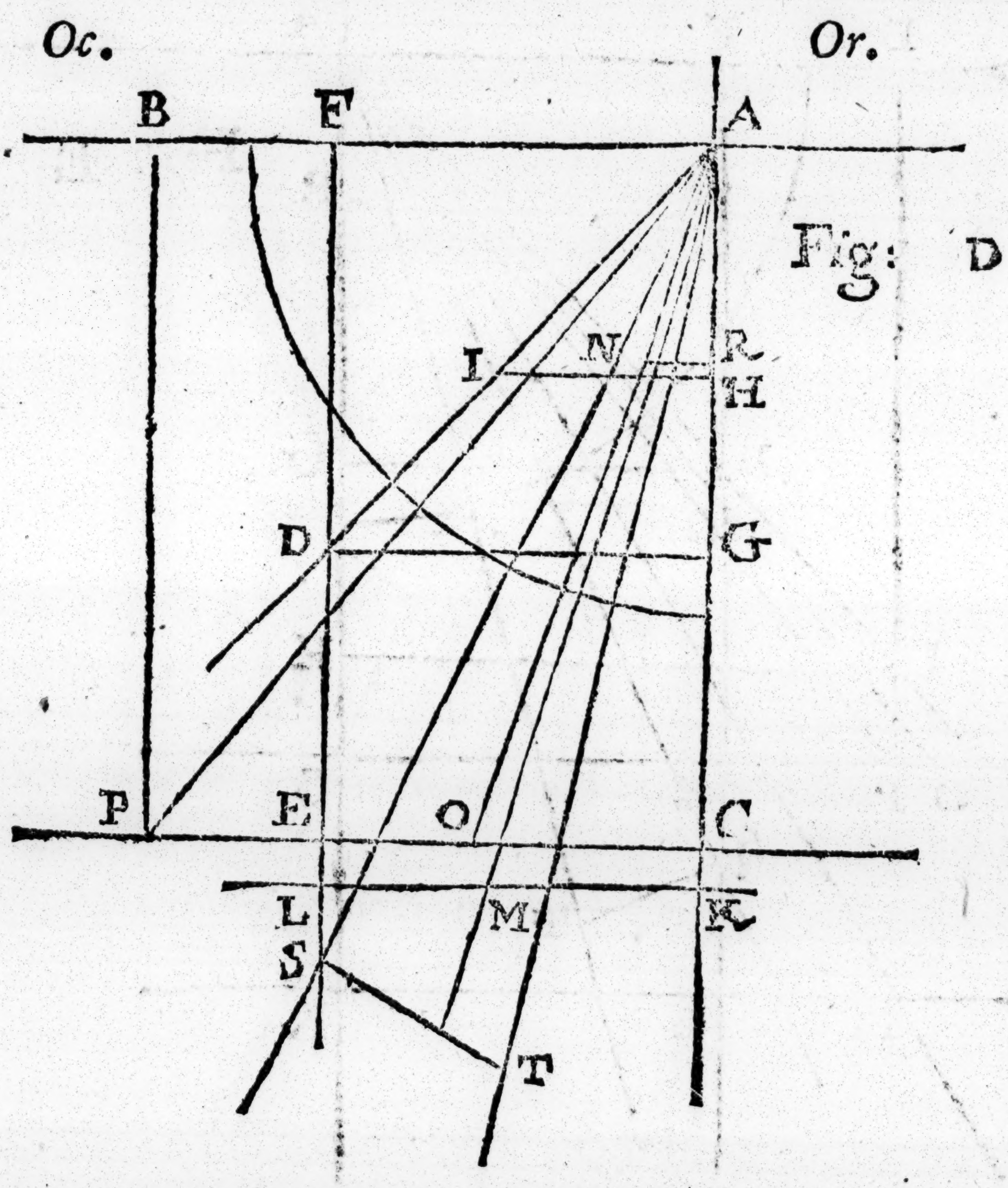
Postremò, in Obliquitatis Lineâ AO ponatur AN = GH differentiæ sc. inter AG & AH: & ducatur NR, Lineæ AB Parallela.

Tum, si AG $\sqsubset$ AH (hoc est, EX $\sqsubset$ CO) super lineam LX versus X ponatur LS = NR. At si AG $\sqsupset$ AH (hoc est, EX $\sqsupset$ CO) super Lineam LF versus F ponatur LS = NR. Producatur pro Substylari AS; super quam, à Puncto S, erigatur ad rectos angulos ST = AR, & producatur Linea Stylaris AT, Substylari ad Angulum SAT insistens. Et in hoc Casu secundo, quam AG $\sqsupset$ AH, Polus oppositus elevatur, (qui è Casibus duobus alter est *Cap.* 2. *Sect.* 9. memoratis.) Et si AG = AH, hoc est EX = CO, Planum Axi Parallelum est; & quod in eo describitur Sciotericum

tericum Centro carebit (ut *Cap.* 2. *Sect.* 5. monstratum erat:) &, in isto Casu. AM Substylaris erit, non autem Linea Duodecimæ.

EXEMPLUM I.

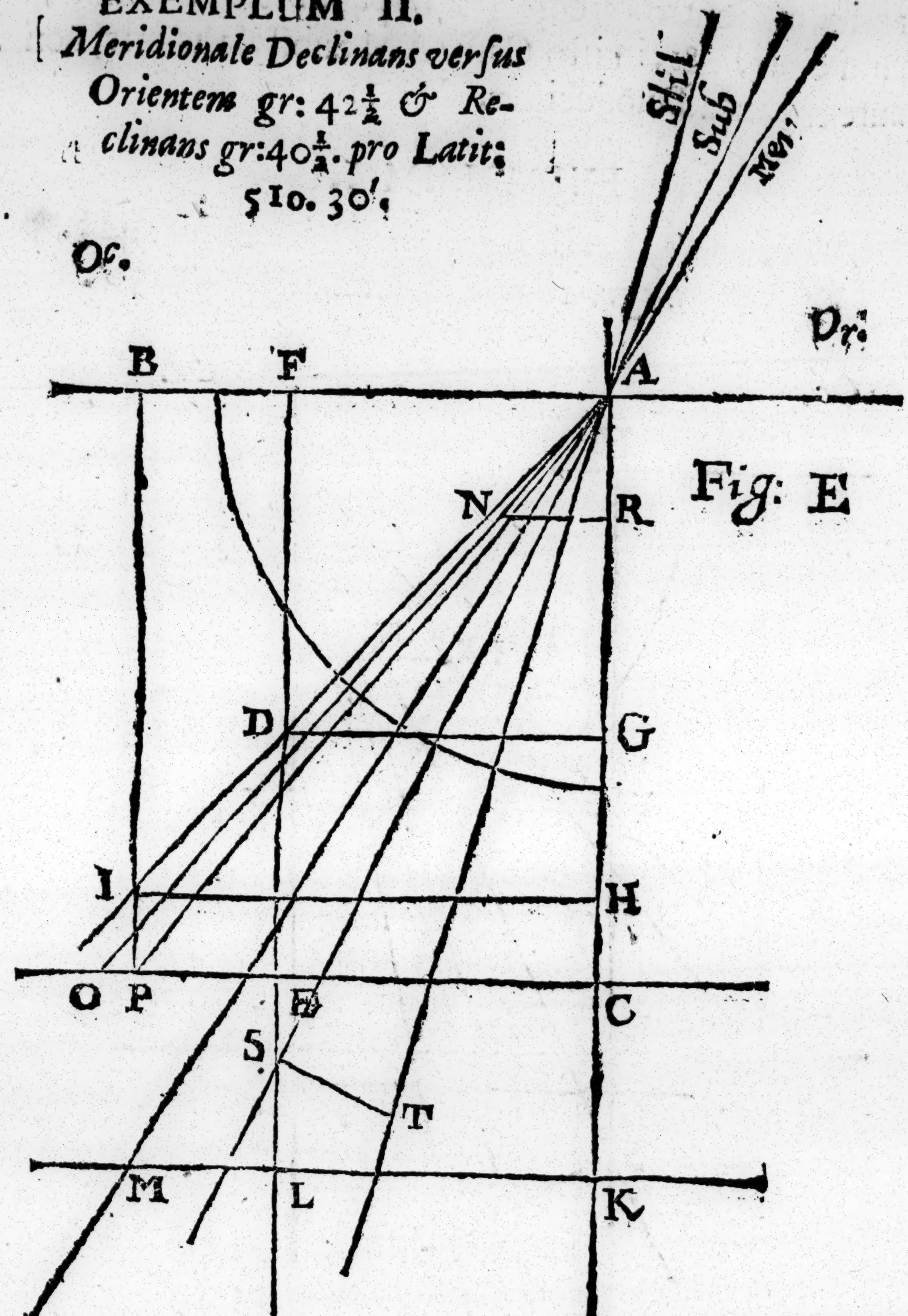
Meridionale, Declinans versus Orientem gr: 42½.
& Reclinans gr. 18. *pro Latitudine gr.* 51. 30'.



Septemtrionale, Declinans versus Orientem, gr. 42½.
& Inclinans gr. 18. *pro Lat. gr.* 51. 30'.

EXEMPLUM II.

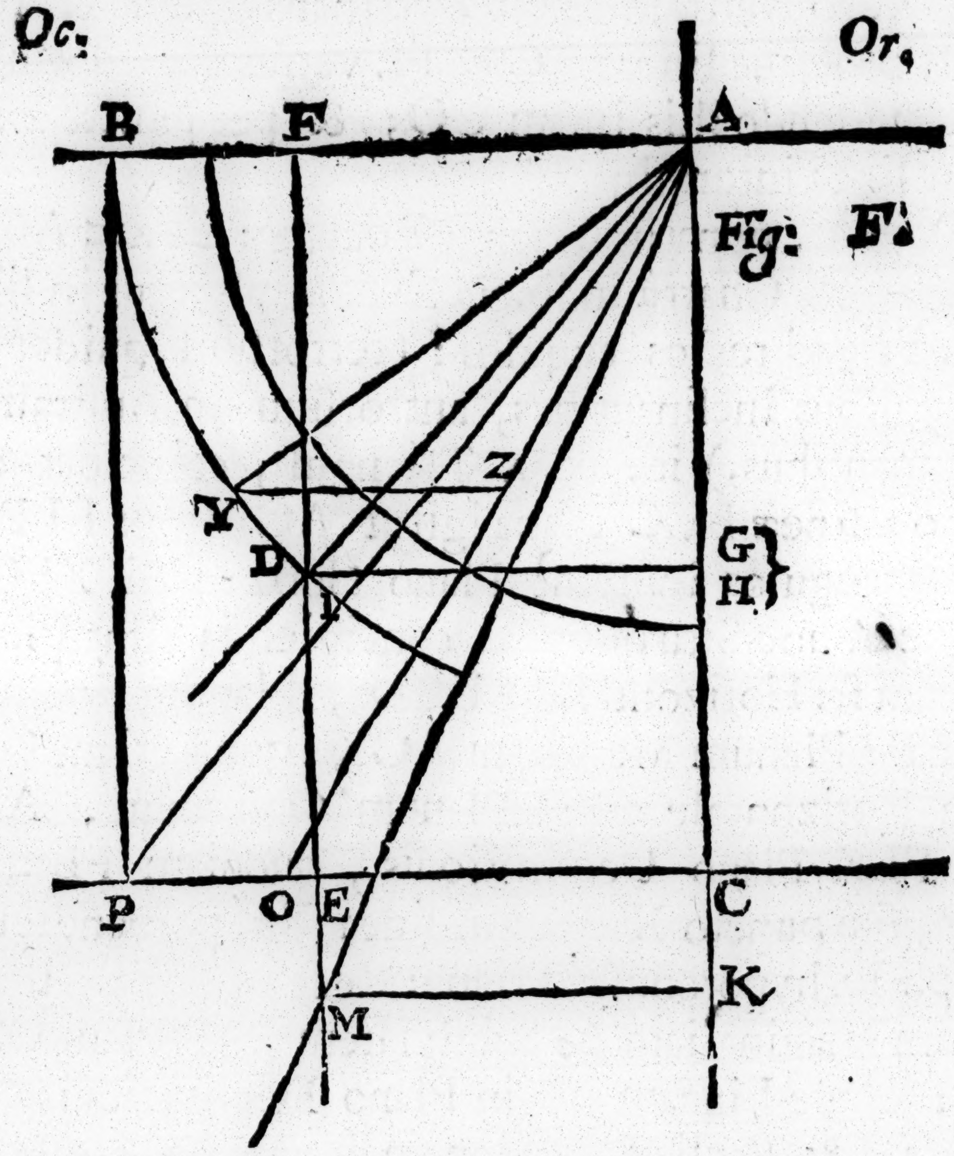
Meridionale Declinans versus Orientem gr: 42½ & Reclinans gr:40½. pro Latit: 51o. 30′.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr:42½ & Inclinans gr:40½. pro Lat: gr:51½.

EXEMPLUM III.

Meridionale Declinans versus Orientem gr: 42½. &
Reclinans gr: 30¼. pro Latit: 51°. 30'.



Septentrionale Declinans versus Orientem gr: 42½. &
Inclinans gr: 42¼. pro Latit: gr: 51½.

Demonstratio operis in Capitibus VIII & IX. Si Sciotericon Australe fuerit Declinans simul & Inclinans; adauge Planum CEX, Papyrum adglutinando lineæ CE, (at ponè Planum ACEP;) in qua sub lineis CA & EF ponantur distantiæ Cκ & Eλ = CO; & per puncta $\kappa\lambda$ ducatur linea interminata.

Si verò Australe fuerit Declinans simul & Reclinans, protrahe lineas AC & FE versus X, ad κ usque & λ, addendo illis ipsam CO; & per puncta $\kappa\lambda$ ducatur linea interminata.

Deinde, ponatur Triang: Rectang: FEλ = ACO; &, dissectâ Chartâ in lineis Eλ, Pλ, plicetur in lineis CE, FE, ad rectos angulos: (retrorsum quidem in Australibus Inclinantibus, antrorsum in Australibus Reclinantibus,) ita ut λ Trianguli, coincidat cum altero λ lineæ EλX. Plana igitur ACEF & ELP, ad rectos angulos insistent Plano Horizontali XEC$\kappa\lambda$. Atque in hoc Situ quinque concipienda sunt Plana; Planum sc: Horizontale, XEC$\kappa\lambda$; Planum Erectum, ACEF; Planum Meridiani, ACX; quod etiam Gnomon Horizontale est; Planum Obliquum, AF$\lambda\kappa$ = AFLK Plano Declinationis, quoniam FL = Fλ. Tum, si à puncto X ducatur linea Xσ perpendicularis ipsi Fλ hypotenusæ Triang: Rectang: FEλ; patet, lineam imaginariam Aσ Substylarem esse Plani Obliqui; eique Lineam AS in Plano Declinationis congruere; & Styli Elevationem à puncto σ esse Xσ = AP = ST; nam Rectang: Triang: X$\sigma\lambda$ = ARN, quia Hypotenusa Xλ = (AG ± AH) AN, & Angulus FλE = ANK Complemento Obliquitatis. Patet etiam, quod in *Casu* 2do, *Capitis* 9ni, ubi AG ⊐ AH,

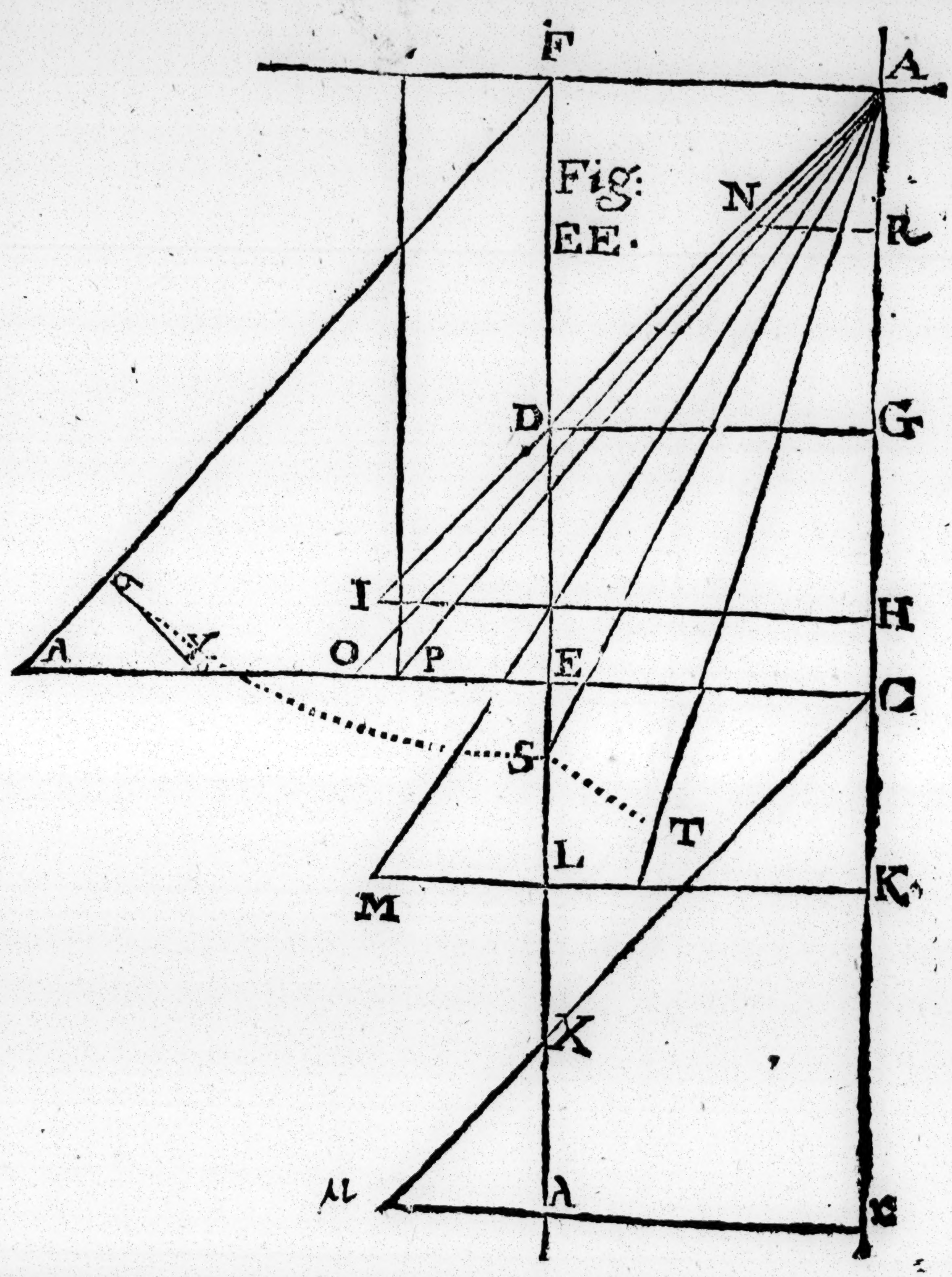
hoc

hoc est, EX ⊐ Eλ, Polus oppositus elevetur.

Postremò, Si Meridianus Horizontalis CX producatur donec Lineæ λκ in puncto μ occurrat; Linea κμ æqualis erit & parallela ipsi KM = HI; nam Rect: Triang: Cκμ = AHI, quoniam Cκ = CO = AH, & Ang: κCμ = ECX = HAI.

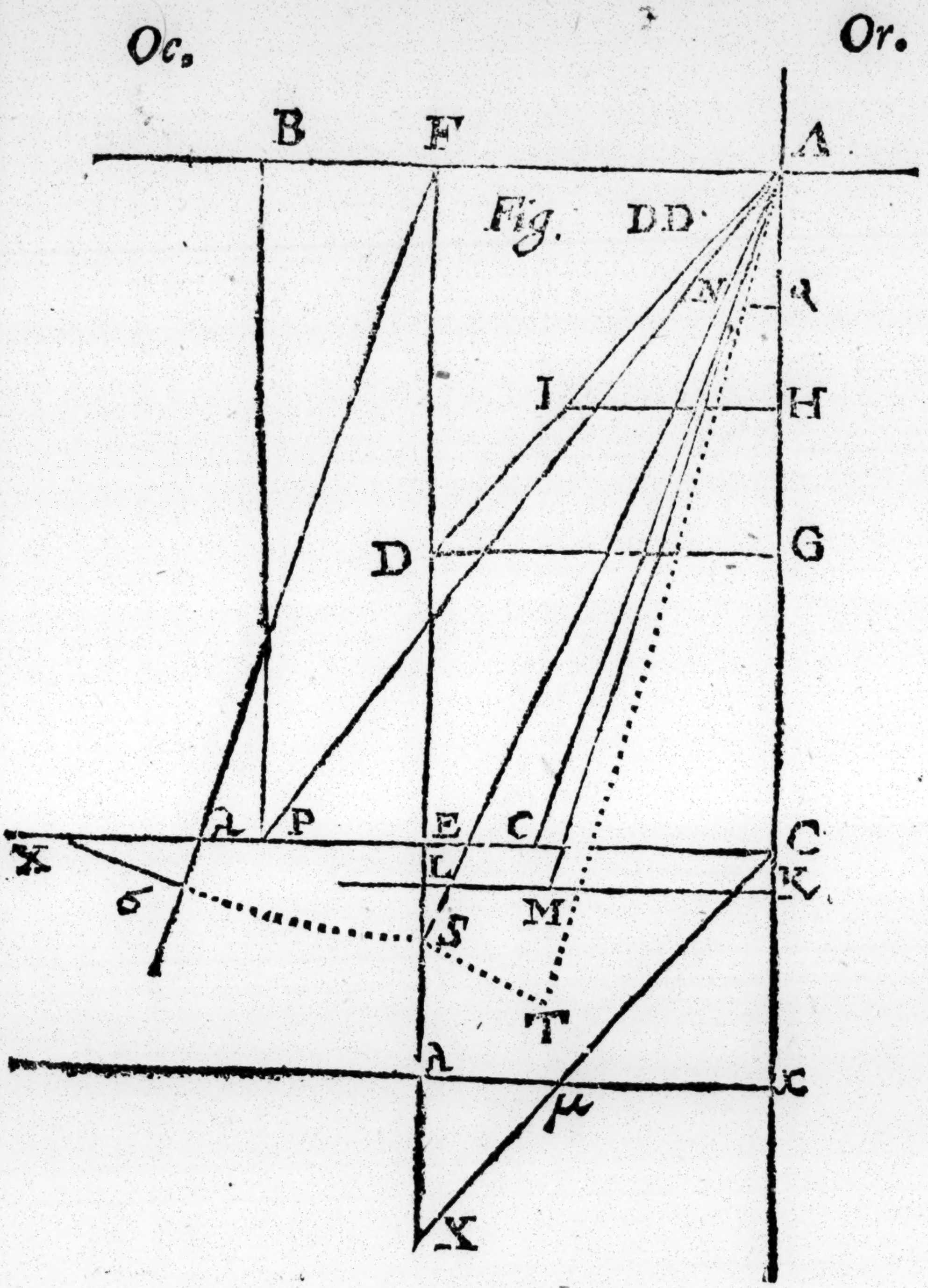
Demonstrationi inserviunt Figuræ Literis duplicibus notatæ CC. DD. EE. FF. *Figuris*, C, D, E, F, *congruentes*.

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans;
In quo $\mathcal{A}\mathcal{G} \sqsubset \mathcal{A}$ *hoc est,* $\mathcal{E}X \sqsubset (CO =)\ E\lambda$.



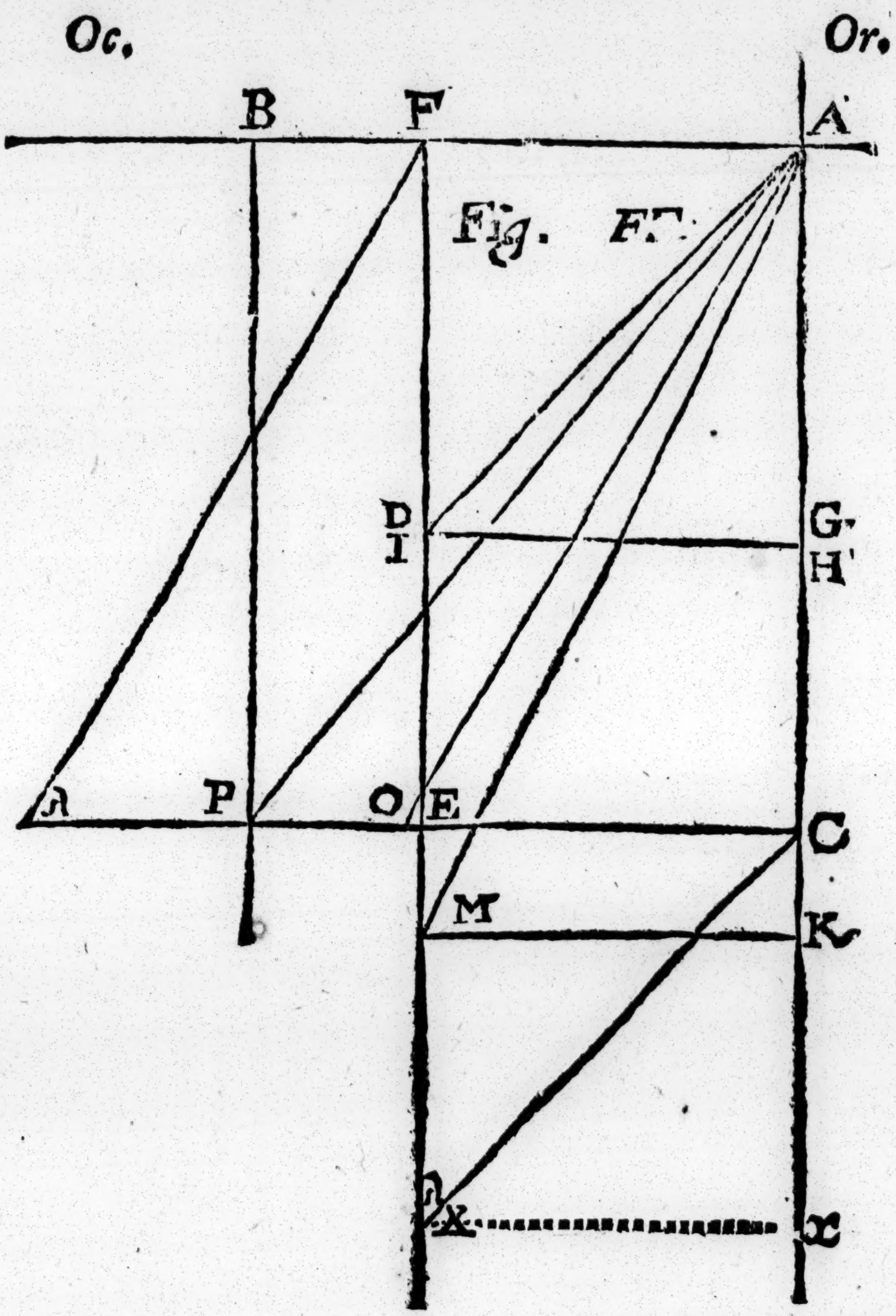
Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

Meridionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo AG ⊏ AH, *hoc est*, EX ⊏ (CO =) Eλ.



Septentrionale Declinans versus Orientem: & Inclinans.

Septentrionale Declinans versus Orientem, & Reclinans:
In quo G & H *sunt idem punctum : Hoc est,*
X & λ *:Vel* CO=EX.



Septentrionale Declinans versus Orientem & Inclinans.

D

Cap. X.

Lineam Contingentem, & Æquinoctialem, cum Meridiana cæterisq; Lineis ejus Horariis, ducere.

1. PEr Regulas præcedentes (secundum Plani situm) debitè inscriptis, Meridiana AM, Substylari AS, & Stylo AT; accipiatur in Substylari (ubi magis appositum videbitur) punctum quodlibet Q, è quo linea longissima ad rectos angulos extendatur; cujus extremitas ad Ortum literis *Or*, ad Occasum *Occ*, notetur. Hæc Linea *Or*. Q. *Oc*. vulgò *Linea Contingens* dicitur; & reverâ est Unica Communis Intersectio plani Æquinoctialis, & plani Scioterici. Ubi hæc linea secat Meridianam AM, affige Literam N.

2. Centrum Æquinoctialis Æ, (è quo describendus est in Sciotericis Centralibus,) punctum est in Substylari, quod à puncto Q tantum distat, quantum ipsum Q, à vicinissimo Styli Puncto, Circino distare inveneris. At si non fuerit Centrale Sciotericum: quodlibet Substylaris punctum pro Centro Æquinoctialis assignare licet; hâc tantum observatâ Regulâ, quod quantum à Contingente distat Centrum Æquinoctialis, tantum à Substylari Stylum distare & parallelωs eminere necesse est.

3. Hoc itaque modo investigato Æquinoctialis Centrro Æ, describatur ex eo (quolibet autem Intervallo,) *Contingentem* versus, Semicirculus Æquino-

ctialis; hoc est, ab utroque Substylaris Latere Quadrans Deinde, Punctis Æ, N, admotâ Regulâ, ducatur Linea ÆN, Circulum Æquinoctialis secans in M. Linea autem ÆM Meridiana Æquinoctialis erit; à quâ sumitur initium Æquinoctialis utrinque dividendi in Horas, per Arcum 15 Graduum, vel in Semihoras per dimidiatos ejusmodi Arcus. Per divisiones verò singulas, è Centro Æ, obscuræ producendæ sunt lineæ ad Contingentem terminatæ: Quæ Lineæ Horariæ Æquinoctialis erunt.

4. Inde hæc oriuntur Consectaria. Primo, quòd in omnibus Sciotericis, quibus eadem Linea & Meridiana simul & Substylaris est, eadem quoque est Meridiana Æquinoctialis.

Secundò, quòd in Orientalibus & Occidentalibus Erectis, Illa Æquinoctialis Diameter quæ Lineæ Contingenti parallelωs jacet, ejusdem est Meridiana.

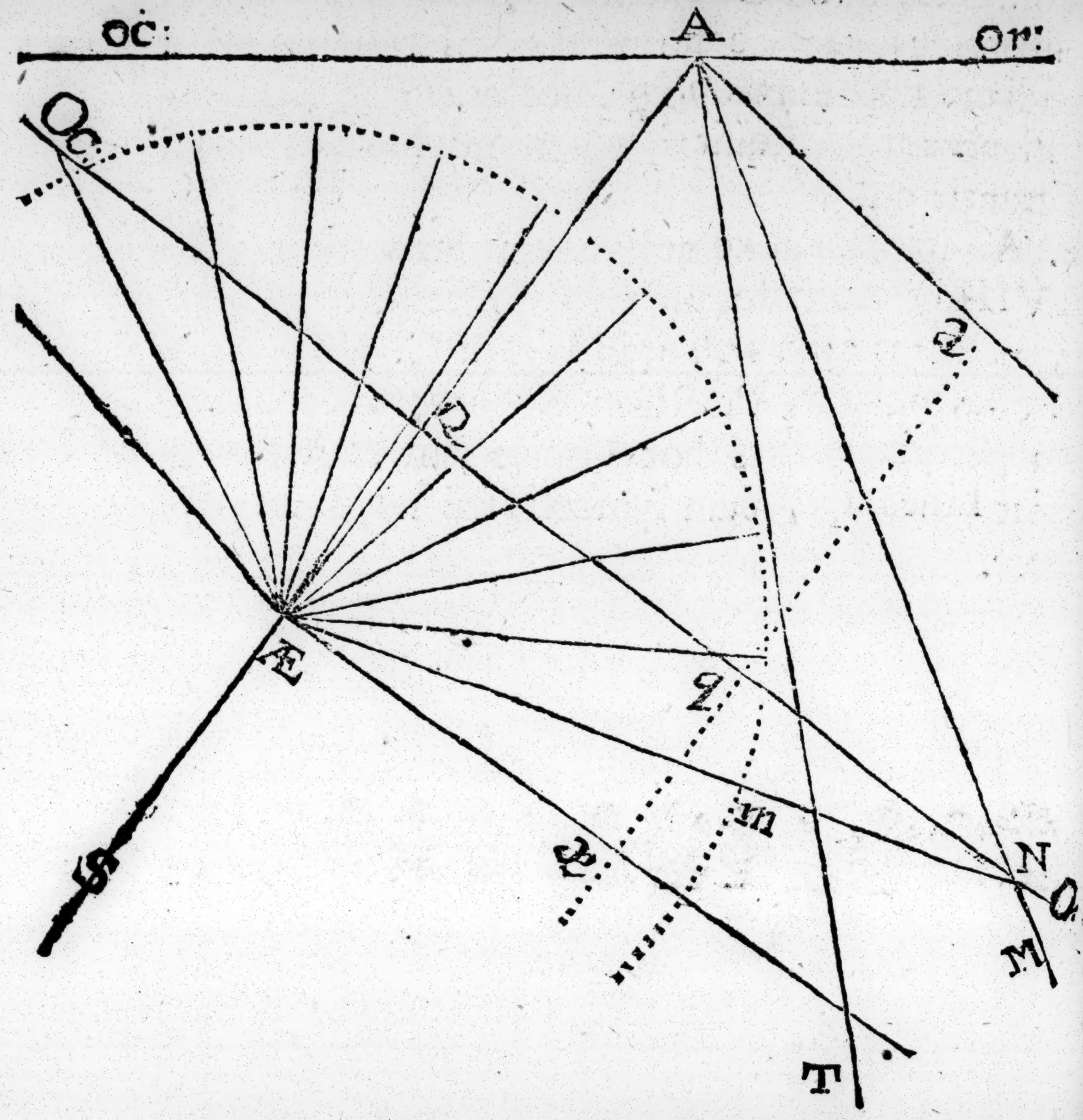
Tertiò, quòd Arcus Æquinoctialis inter Meridianam ejus, & Substylarem est Differentia Longitudinis, seu Miridiani, Loci subjecti, & Loci illius in Terra cui Planum istud Horizontale est; Locus autem iste ad easdem Partes Substylaris ubi Meridiana situatur; hoc est, ad Plagam illam cui vergit Declinatio, Orientem sc. vel Occidentem: At si Arcus iste nihil fuerit, idem est utriusque Loci Meridianus, & Latitudine tantum differunt.

Quartò, quod Orientalia Occidentalia Erecta Illis sunt Horizontalia, qui, sub Æquinoctiali, à Meridiano Loci gr. 90. in Ortum aut Occasum distantes habitant.

Postremò,

Poſtremò, quòd Orientalibus aut Occidentalibus, Inclinantibus aut Reclinantibus, Meridianus eſt à Meridiano Loci minùs 90 gr. remotus; & quò major Planorum Obliquitas, eò minor Meridianorum Differentia eſt.

5. Accipiemus, Exempli gratia, Scioterícon (*Capitis* VIII i) Auſtrale, in Ortum Declinans gr. 42°. 30′, nclinans 24°. 00′; ut in *Figura* C. Cujus haud opus eſſe, opinor, Practicen ex integro deponere, quum perſpicuè ſatis hoc Capite jam tractata ſit: ſufficiat Lineas ipſas cum ſymbolis ſeu notis ſuis deſcribere.

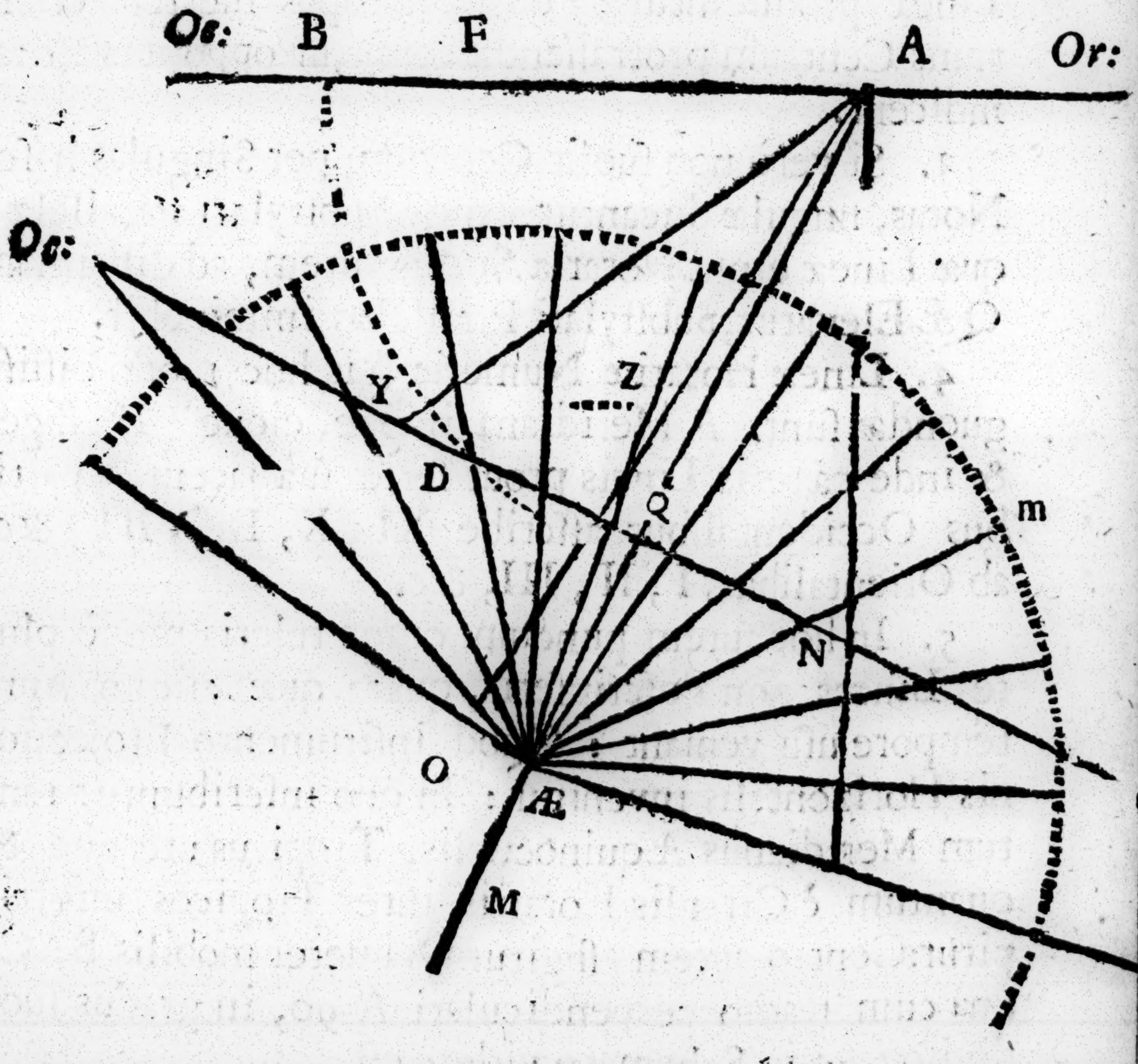


6. In tertio autem Casu *Capitis* IX ; quoniam AM Subſtylaris eſt, & non Linea XIIæ. Meridiana Æquinoctialis peculiari Methodo indagatur, ſecundum hoc Theorema.

Ut Radius. ad Sinum Declinationis, ::
Ita Sinus Complementi Obliquitatis.
Ad Arcum Æquinoctialis, qui eſt deſtantia Meridianæ Æquinoctialis à Subſtylari verſus plagam Declinationis.

Geometrice

Geometricè verò sic perficitur. Radio AB describatur Arcus BD: & super Lineam Obliquitatis AO, ponatur AZ=AF; &, per punctum Z, ducatur Linea ZY, ipsi AB parallela, & Arcum BD secans in Y: jungantur etiam AY: adeoque habetur Angulus BAY; cui Angulus æqualis AÆm ponatur intra Circulum Æquinoctialem. Accipiatur, Exempli gratia, Scioterícon (in 3tio *Casu* IXi *Capitis*) Australe Declinans in Ortum 43°. 30′. Reclinans 30°.



Cap. XI.

Lineas Horarias describere, & proprias quamque numeris notare.

1. Quoniam Linea Contingentiæ *Or. Q. Oc.* unica est Linea utrisque Planis, tum Æquinoctialis tum Scioterici, communis, & in eâ designatos habes Linearum omnium Horariarum Terminos; facillimum erit & ipsas Lineas Horarias ducere.

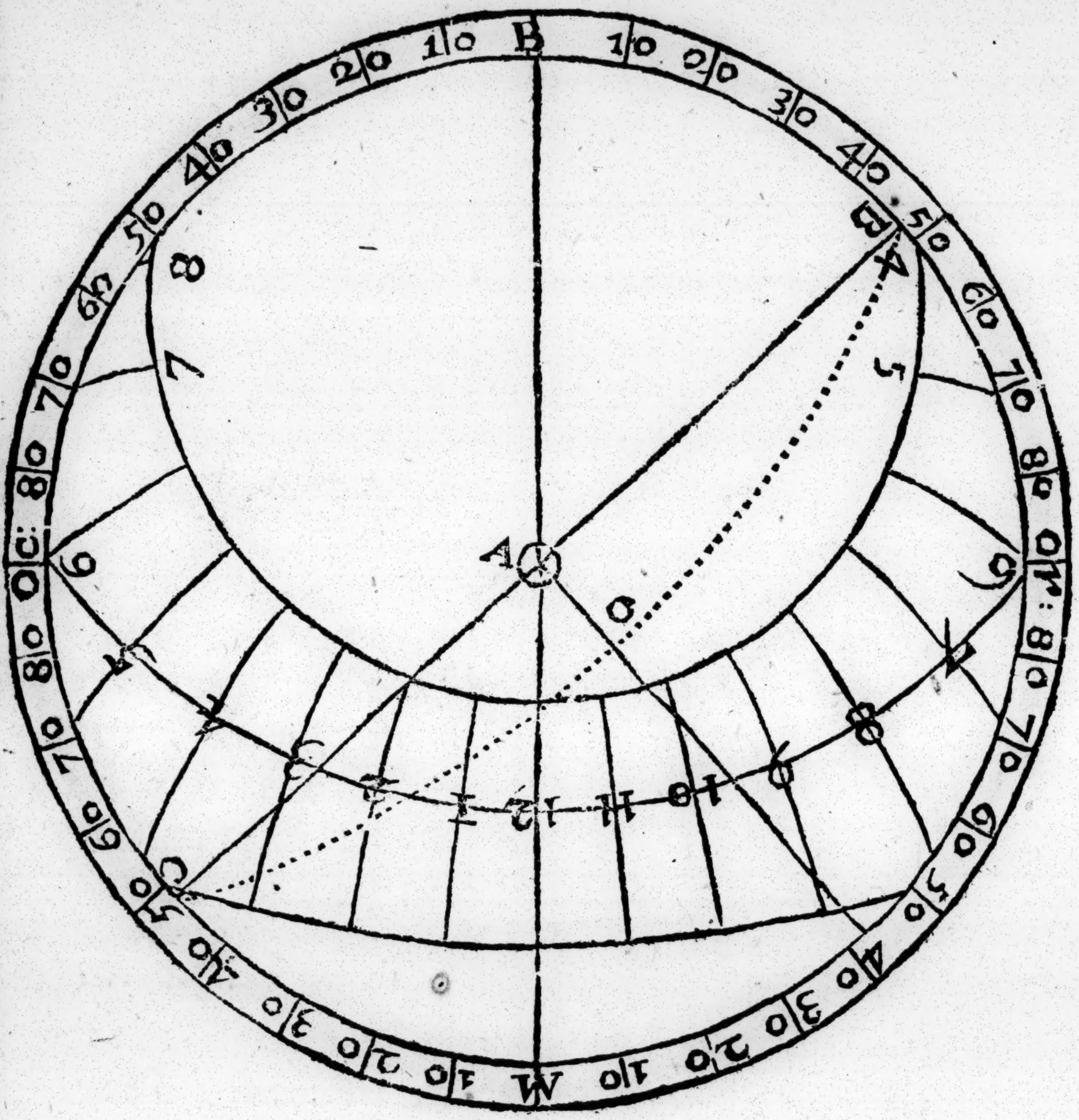
2. Nam, si Scioterico Centrum fuerit; applicetur Centro A Regula; & per Singulas successivè Notas Lineæ producantur; quæ, si opus fuerit, etiam trans Centrum protrahendæ erunt, ut oppositas Horas indicent.

3. Si verò non fuerit Centrum; per Singulas hasce Notas, singulæ ducantur Lineæ, Substylari Parallelæ: quæ Lineæ erunt Horariæ. Stylus autem, ad distantiam QÆ Elevatus, Substylari Parallelus imminebit.

4. Lineæ Horariæ Numeris suis hoc modo distinguendæ sunt. A Meridiana incipe, eique XII affige: & inde cæteris Lineis prout serie suâ jacent, à partibus Occidentalibus ascribe XI, X, IX, VIII, &c. ab Orientalibus, I, II, III, &c.

5. In hoc autem punctum omne tuleris, modò plures Lineas non descripseris, quàm quæ aliquo Anni tempore usu veniant: Quod Instrumento Projectionis Horizontalis invenitur: In quo inscribuntur tantum Meridianus Æquinoctialis, Tropicus uterque & quantum è Circulis Horariis inter Tropicos intercipitur: Centro autem affigitur Diameter mobilis BAC, unà cum Radio perpendiculari A 90, in gradus suos diviso; ut in Schemate videre est.

Instrumento


B
A
M
Oc:
Or:
10 I 12 II 10

Instrumento autem sic utimur. Gradus Obliquitatis, puncto delebili O, notetur in Radio: quem Gradui Declinationis in Margine affigas, (à Partibus quidem congruis, si Planum Inclinet; Oppositis verò, si Reclinet:) Deinde, per Extremitatis utrasque Diametri mobilis, punctumque Obliquitatis O, Arcum Circuli COB ductum puta: Arcus iste, à Partibus Convexis, Planum Inclinans representabit; à Concavis autem, Reclinans; Ideoque Horas Plano ritè describendas exhibebit.

Exempli gratia. Sit Planum Australe in Ortum Declinans gradus 42°, 30'. Inclinans gradus 24; vel Planum Boreale Declinans in Occasum 42°, 30'. Reclinans 24°. Applicetur Radius graduis 42°, 30', inter Ortum & Meridiem; notetur etiam Obliquitas Litera O. Deinde per tria hæc Puncta data, B, O, C, Arcum Circuli occultè ductum puta. Arcus iste à parte Convexa (hoc est, in Australi Inclinanti) ab Exortu Solis usque ad Primam Pomeridianam Horas indicabit: à Parte autem Concavâ (hoc est in Plano Boreali Reclinanti) à Secunda Pomeridiana ad Occasum.

Observandum est Diametrum nobilem Murum aut Planum Erectum representare, cui Declinatio illa 42°, 30', contingit.

Et ad hanc Methodum in omnimodis aliis Plani Positionibus vel Declinatione vel Obliquitate diversis hoc Instrumento utendum est.

6. Si Lineæ alicui Horariæ, sive Æquinoctialis sive ipsius Scioterici, non sit, intra Chartam, *Contingentis* Occurrendæ locus, adeo ut non detur Punctum Interfectionis

sectionis cui congruè ducatur Linea: Contingentem utcunque in puncto *q* seca, ductâ Substylari parallelâ, quæ datam quoque Lineam Horariam secet; Sic Tres Lineæ dantur, scilicet ÆQ, Centri Æquinoctialis à Contingente Distantia; AQ Centri Scioterici à Contingente Distantia; & Parallelæ Segmentum inter Contingentem & Lineam Æquinoctialis horariam datam: Ex his Quarta invenitur, nempe Segmentum ejusdem Parallelæ inter Contingentem, Lineamque Horariam Scioterici quæsitam. Ut in Schemate *Cap.* X. *Sect.* 5.

ÆQ. AQ:: qæ. qa.
Vel AQ, ÆQ:: qa. qæ.

7. Quoniam in Sciotericis fortasse VIIIi *Capitis*, Punctm S Centro nimis propè inciderit, adeo ut Substylaris minus certo duci queat: Angulum CAS è Canone Triangulorum hoc modo invenire potes.

Ut Sinus semi-summæ, Complementi Altitudinis Polaris, & Obliquitatis;
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Arcus Primi.*

Rursus,

Ut Sinus semi-summæ, Polaris Altitudinis, & Obliquitatis:
Ad Sinum Differentiæ eorundem ::
Ita Tangens semi-complementi Declinationis;
Ad Tangentem *Secundi Arcus.*

Tum,

Tum, si Altitudo Polaris Obliquitatem excedat; Arcuum Differentia æqualis erit Angulo CAS: sin minùs, utrorumque summa.

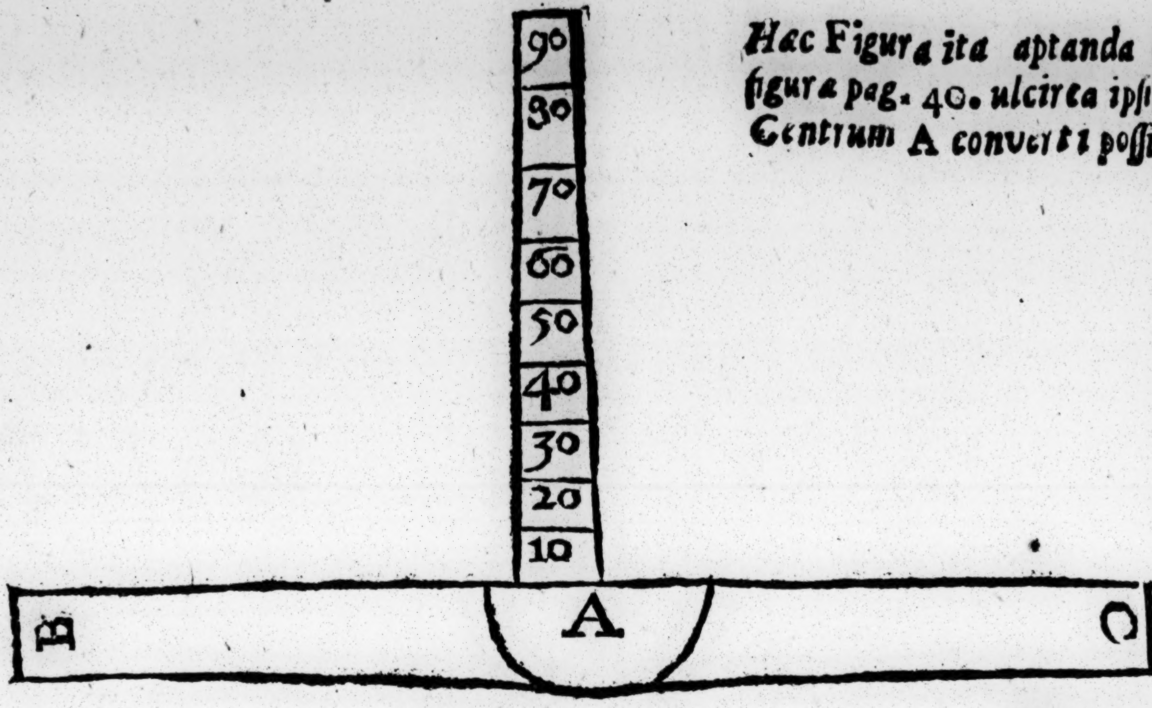
8. In Sciotericis etiam *Capitum* VIIIi & IXi, si Angulus CAM pro Meridiano, inventu difficilior fuerit: dicito

Rad. Sin: Obliquitatis :: Tang: Declin. Tang: CAM.

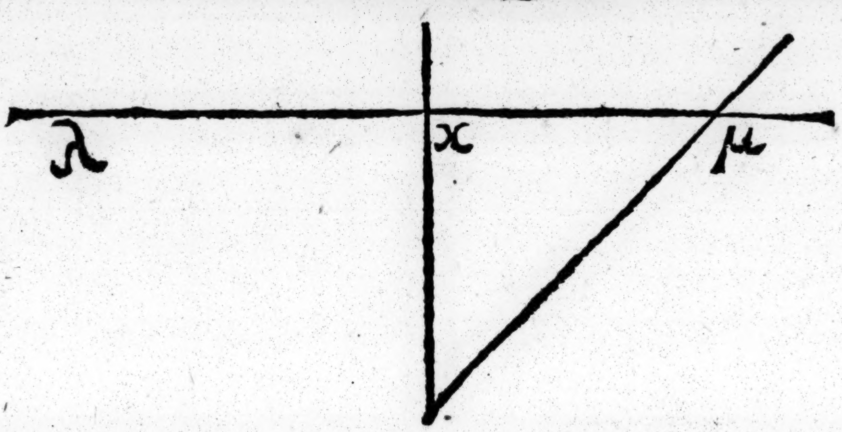
SOLI DEO LAUS ET GLORIA.

FINIS.

Hæc Figura ita aptanda est figuræ pag. 40. ut circa ipsius Centrum A converti possit.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ CC, prout dirigitur Cap. IX. Sect. 2.



Hæc Figura agglutinanda est à tergo figuræ AA, Cap. 6. ut lineis similiter notatis directè substit.